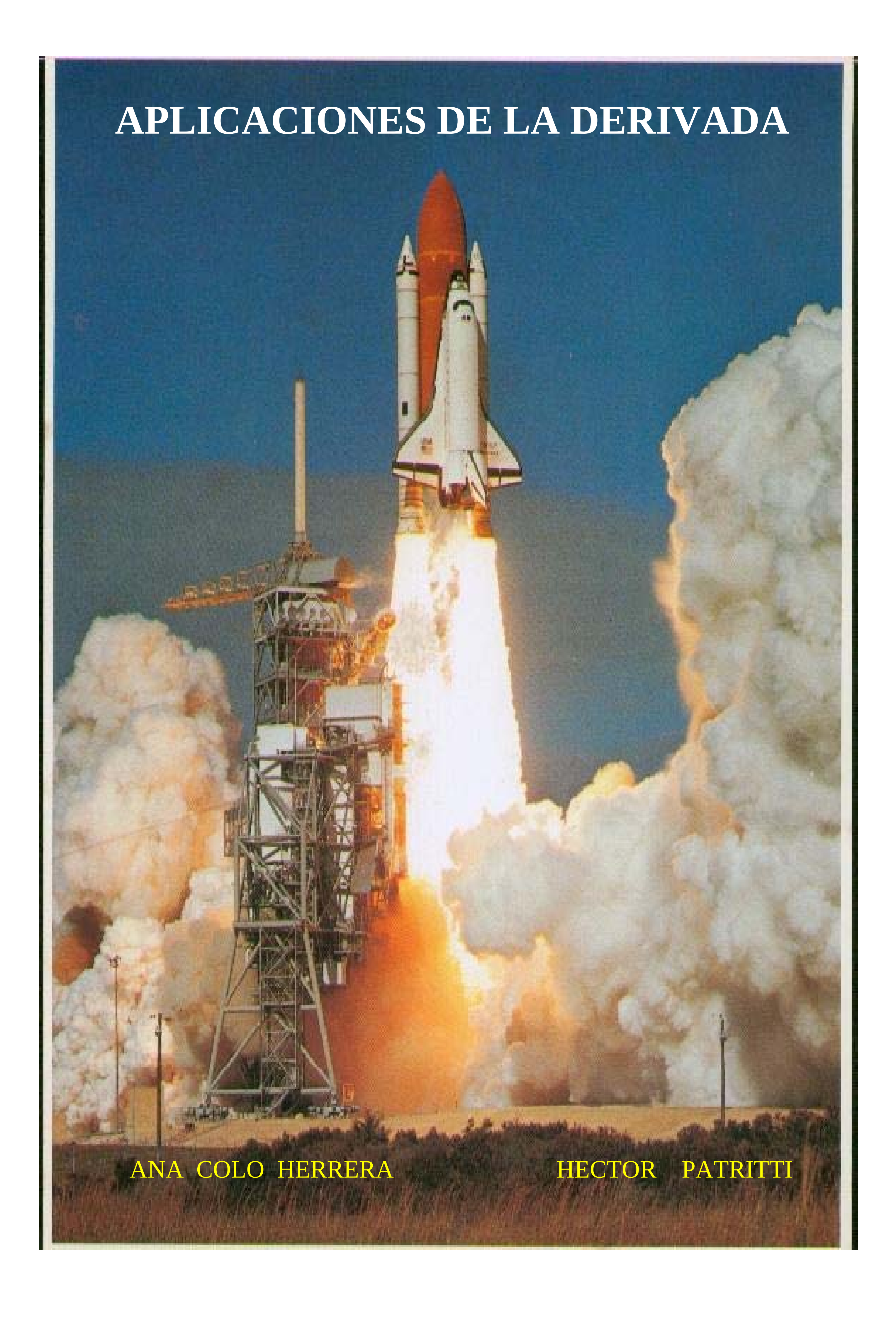

APLICACIONES DE LA DERIVADA
ANA COLO HERRERA
HECTOR PATRITTI

PARA LOS CURSOS DE MATEMATICA DE LOS BACHILLERATOS TECNOLÓGICOS DEL C.E.T.P.

APLICACIONES DE LA

DERIVADA

Ejercicios resueltos

PROF. ANA COLO HERRERA **PROF. HECTOR PATRITTI**

Publicación inscrita en la Biblioteca Nacional el 5 de enero del 2004 en el Libro No.29 con el No.232 habiéndose realizado los aportes legales correspondientes según Art.7 de la ley No. 9739 sobre derechos de autor.

Email: anacolo@adinet.com.uy hpatritti@yahoo.com.ar
Telefax: 7120680 Montevideo -Uruguay

CONTENIDO

PROLOGO

AL ESTUDIANTE

La presente publicación tiene por objetivo poner a tu disposición una amplia serie de ejercicios , con sus correspondientes resoluciones , relativos a la aplicación del concepto de Derivada a problemas de las distintas disciplinas que involucran los Bachilleratos Tecnológicos en sus diferentes orientaciones.

Partimos de la base de que estás familiarizado con los conceptos teóricos correspondientes a Funciones de Variable Real que tu docente del curso ha desarrollado respecto al concepto de Derivada.

Al comienzo de la publicación encontrarás un resumen de los conocimientos que deberás tener presentes para resolver los problemas propuestos así como una tabla de derivadas.

Al final de la publicación te sugerimos aquellos ejercicios que entendemos adecuados según el Bachillerato que estás cursando, sin que ello signifique naturalmente , que los restantes carezcan de interés para tí.

Esperamos que si aún no lo estás , llegues a convencerte de la importancia relevante que el concepto de Derivada tiene en la resolución de problemas relativos a la tecnología en sus distintas disciplinas.

La publicación está dividida en dos Capítulos.

El Capítulo1 se refiere a la derivada como índice matemático que expresa la tasa de variación instantánea o rapidez de variación instantánea de una función y consta de veinticuatro ejercicios.

El Capítulo 2 está dedicado a problemas de Optimización y consta de sesenta ejercicios.

Los enunciados de algunos de estos ejercicios corresponden a conocidos problemas que seguramente encontrarás en distintos textos de Matemática pero que han sido modificados y/o adaptados por los autores a los cursos de los Bachilleratos Tecnológicos.

Otros son creación de los autores.

El enunciado del ejercicio No. 54 corresponde al ejercicio No.18 , página 317 del libro “Cálculo” de James Stewart que ha sido incluído por considerar que se trata de una interesante muestra de aplicación de los conceptos que estamos manejando

en una disciplina aparentemente alejada de la que tú has elegido

Las resoluciones de todos los ejercicios propuestos en la publicación son de exclusiva responsabilidad de los autores.

Deseamos hacerte una precisión respecto de la notación utilizada en la resolución de los ejercicios.

De las distintas notaciones que suelen utilizarse para la "**función derivada primera**" de una función **f** de variable real **x** , a saber f' , f_x , $\frac{df}{dx}$, hemos adoptado la notación de Leibnitz $\frac{df}{dx}$ que entendemos la más adecuada pues explicita claramente la variable respecto de la cual se efectúa la derivación , hecho este que en los problemas técnicos es absolutamente relevante.

$\frac{df}{dx}$ será entonces la notación para la función derivada primera. de la función **f** respecto de la variable **x** .

$\frac{df}{dx}(x_o)$ será el valor de la función derivada primera en el punto x_o.

$\frac{d^2f}{dx^2}$ será la notación para la "función derivada segunda" de la función **f** respecto de la variable **x** .

$\frac{d^2f}{dx^2}(x_o)$ será el valor de la función derivada segunda en el punto x_o.

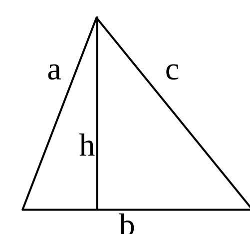
Previo al Capítulo 1 encontrarás un resumen de fórmulas de perímetros , áreas y volúmenes , un resumen de fórmulas trigonométricas , y una tabla de derivadas. También una selección de definiciones y teoremas que has visto en el curso teórico y que deberás tener presentes para resolver los ejercicios del Capítulo 1.

Si este material que ponemos a tu disposición resulta de utilidad en tu formación matemática habremos alcanzado nuestro objetivo.

LOS AUTORES

Perímetros , Areas y Volúmenes

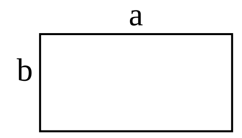
Triángulo



$p = a + b + c$

$A = \frac{b.h}{2}$

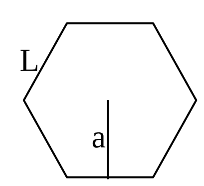
Rectángulo



$p = 2a + 2b$

$A = a.b$

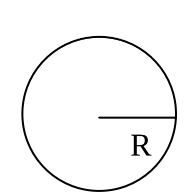
Hexágono



$p = 6L$

$A = \frac{p.a}{2}$

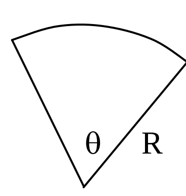
Círculo



Long. Cfa.= $2\pi R$

$A = \pi R^2$

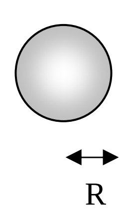
Sector circular



Long. Arco = $R\theta$

$A = \frac{1}{2} R^2 \theta$

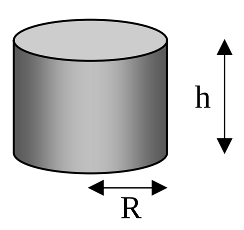
Esfera



$A = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

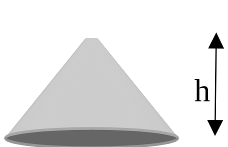
Cilindro



$A_{total} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$

$V = \pi R^2 h$

Cono



$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

TRIGONOMETRIA

Unidades de medida de ángulos

- Grados
- Radianes

Equivalencia: $360^0 = 2\pi$ rad. $\Longrightarrow$ $1 \text{ rad} = \frac{180^0}{\pi} \cong 57^0\ 17^m$

Longitud de un arco de circunferencia de radio R que subtiende un ángulo central θ

$$s = R\theta \qquad \theta \text{ en radianes}$$

Valores de líneas trigonométricas de algunos ángulos especiales.

θ Grados	0	30	45	60	90	120	180	270	360
θ Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	- 1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	- 1	0	1
tg θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	0	$\nexists$	0

Angulos suplementarios $\theta + \varphi = \pi$

$\text{sen } \theta = \text{sen } (\pi-\theta)$ $\qquad \cos\theta = -\cos(\pi-\theta)$ $\qquad \text{tg } \theta = -\text{tg } (\pi-\theta)$

Angulos complementarios $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\text{sen } \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\qquad \text{tg } \theta = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Angulos opuestos

$\text{Sen } (-\theta) = -\text{sen } \theta$ $\qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$ $\qquad \text{tg } (-\theta) = -\text{tg } \theta$

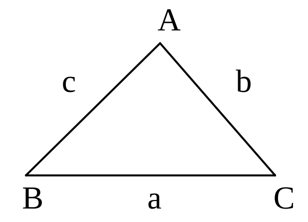
Angulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$ y en π

$\text{sen}\,(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta \qquad \cos\,(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{tg}\,(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\,\text{cotg}\,\theta$

$\text{sen}\,(\theta+\pi) = -\,\text{sen}\,\theta \qquad \cos\,(\theta+\pi) = -\cos\theta \qquad \text{tg}\,(\theta+\pi) = \text{tg}\,\theta$

Teorema del seno

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}$$



Teorema del coseno

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$

Fórmula fundamental

$$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$$

Fórmulas de suma y resta de ángulos

$\text{sen}\,(x+y) = \text{sen}\,x\cos y + \cos x\,\text{sen}\,y$

$\text{sen}\,(x-y) = \text{sen}\,x\cos y - \cos x\,\text{sen}\,y$

$\cos\,(x+y) = \cos x\cos y - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$

$\cos\,(x-y) = \cos x\cos y + \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$

$\text{tg}\,(x+y) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x\,\text{tg}y}$

$\text{tg}\,(x-y) = \frac{\text{tg}x - \text{tg}y}{1 + \text{tg}x\,\text{tg}y}$

Fórmulas del ángulo doble

$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}x\cos x \qquad \cos 2x = \cos^2x - \text{sen}^2x \qquad \text{tg}\,2x = \frac{2\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x}$

Fórmulas del ángulo mitad

$\text{sen}^2x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

TABLA DE DERIVADAS

f(x)	$\frac{df}{dx}$	f(x)	$\frac{df}{dx}$
k	0	senx	cosx
x	1	cosx	- sen x
|x|	sg(x) x≠0	tgx	$1 + tg^2x$
x^m	mx^{m-1}	Arcsenx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Arccosx	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	shx	chx
e^x	e^x	chx	shx
Lx	$\frac{1}{x}$	thx	$1 - th^2x$
L|x|	$\frac{1}{x}$	Argshx	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Sg(x)	$0 \quad \forall x \neq 0$	Argchx	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	a^x La	Argthx	$\frac{1}{1-x^2}$

DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS

$(f\circ g)(x)$	$\frac{d(f\circ g)}{dx}$	$(f\circ g)(x)$	$\frac{d(f\circ g)}{dx}$
$g(x)$	$\frac{dg}{dx}$	sen g(x)	$\cos g.\ \frac{dg}{dx}$
$k.g$	$k\frac{dg}{dx}$	cos g(x)	$-\ \text{sen}\ g.\ \frac{dg}{dx}$
$\lvert g\rvert$	$sg(g).\ \frac{dg}{dx}$	tg g(x)	$(1+tg^2 g).\frac{dg}{dx}$
g^m	$mg^{m-1}\ \frac{dg}{dx}$	Arcsen g(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{dg}{dx}$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{1}{g^2}\ \frac{dg}{dx}$	Arccos g(x)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{dg}{dx}$
$\sqrt{g}$	$\frac{1}{2\sqrt{g}}\ \frac{dg}{dx}$	Arctg g(x)	$\frac{1}{1+g^2}\ \frac{dg}{dx}$
$\sqrt[3]{g}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{g^2}}\ \frac{dg}{dx}$	sh g(x)	$ch\ g(x).\ \frac{dg}{dx}$
e^{g}	$e^{g}\ \frac{dg}{dx}$	ch g(x)	$sh\ g(x).\ \frac{dg}{dx}$
Lg o $L\lvert g\rvert$	$\frac{1}{g}\ \frac{dg}{dx}$	th g(x)	$(1-th^2 g)\frac{dg}{dx}$
$L\left\lvert\frac{g}{h}\right\rvert$	$\frac{1}{g}\frac{dg}{dx}-\frac{1}{h}\frac{dh}{dx}$	Argsh g(x)	$\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\ \frac{dg}{dx}$
a^{g}	$a^{g}.La.\ \frac{dg}{dx}$	Argch g(x)	$\frac{1}{\sqrt{g^2-1}}\ \frac{dg}{dx}$
g^{h}	$g^{h}\left[\frac{dh}{dx}Lg+\frac{h}{g}\frac{dg}{dx}\right]$	Argth g(x)	$\frac{1}{1-g^2}\ \frac{dg}{dx}$
$h\ e^{g}$		$e^{g}\left[\frac{dh}{dx}+h.\frac{dg}{dx}\right]$	

SELECCIÓN DE DEFINICIONES Y TEOREMAS

<u>Definición de función derivable en un punto</u>.

Una función **f** de variable real **x** con dominio D se dice **derivable en un punto x_o** perteneciente a D si y sólo si existe y es finito , el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \qquad h \in R$$

Al valor de dicho límite se le llama " **derivada de la función f en el punto x_o**".

Teorema 1) <u>Derivada de suma de funciones</u>

H) Si f y g son funciones derivables en x_o

T) $$\frac{d(f+g)}{dx}(x_o) = \frac{df}{dx}(x_o) + \frac{dg}{dx}(x_o)$$

Teorema 2) <u>Derivada del producto de funciones</u>

H) Si f y g son funciones derivables en x_o

T) $$\frac{d(f.g)}{dx}(x_o) = g(xo)\frac{df}{dx}(x_o) + f(x_o)\frac{dg}{dx}(x_o)$$

Teorema 3) <u>Derivada del cociente de funciones</u>

H) Si f y g son funciones derivables en x_o con $g(x_o) \neq 0$

T) $$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx}(x_o) = \frac{g(x_o).\frac{df}{dx}(x_o) - f(x_o).\frac{dg}{dx}(x_o)}{g^2(x_o)}$$

Teorema 4) <u>Derivada de la función compuesta o regla de la cadena</u>

H) Si **g** es derivable en x_o y **f** derivable en $g(x_o)$

T) $$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x_o) = \frac{df}{dg}[g(x_o)].\frac{dg}{dx}(x_o)$$

Definiciones

Función creciente en un punto

Una función **f** es creciente en un punto $\mathbf{x_o}$ si cumple:

$f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in E^{-}_{x_{o,\delta}}$ (semientorno izquierdo de centro x_o y radio δ)

$f(x) \geq f(x_o) \quad \forall x \in E^{+}_{x_{o,\delta}}$ (semientorno derecho de centro x_o y radio δ)

Función decreciente en un punto

Una función **f** es decreciente en el punto $\mathbf{x_o}$ si cumple:

$f(x) \geq f(x_o) \quad \forall x \in E^{-}_{x_{o,\delta}}$

$f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in E^{+}_{x_{o,\delta}}$

Máximo y mínimo relativos

$f(x_o)$ es máximo relativo en x_o de la función **f** si se cumple:

$f(x_o) \geq f(x) \quad \forall x \in E_{x_{o,\delta}}$

$f(x_o)$ es mínimo relativo en x_o de la función **f** si se cumple:

$f(x_o) \leq f(x) \quad \forall x \in E_{x_{o,\delta}}$

Teorema 5) Relación entre derivabilidad y continuidad

H) Si una función **f** es derivable en el punto $\mathbf{x_o}$

T) **f** es contínua en el punto $\mathbf{x_o}$

Sobre este teorema recuerda que el recíproco **no** es válido, es decir, existen funciones contínuas en un punto pero no derivables en él.

Teoremas que relacionan la derivada en un punto con la variación de la función en él.

Teorema 6)

H) $\frac{df}{dx}(x_0) > 0$

T) **f** creciente en el punto $\mathbf{x_o}$

Teorema 7) **H)** $\dfrac{df}{dx}(x_0) < 0$

T) **f** decreciente en el punto $\mathbf{x_0}$

Teorema 8) **H)** **f** presenta máximo o mínimo relativo en $\mathbf{x_0}$

$\exists \; \dfrac{df}{dx}(x_0)$

T) $\dfrac{df}{dx}(x_0) = 0$

Respecto de este teorema debes tener presente que:

1ro) El recíproco no es cierto. Puedes tener una función con derivada nula en un punto x_0 y la función no presentar en él un extremo relativo. La fig. (1) te muestra esa posibilidad.

2do.) Una función puede presentar extremo relativo en un punto x_o y no ser derivable en él. La fig. (2) te ilustra uno de estos casos para una función contínua en x_0 y la figura (3) para una función discontínua en x_0 .

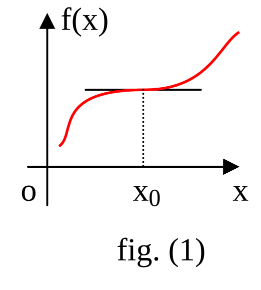


fig. (1)

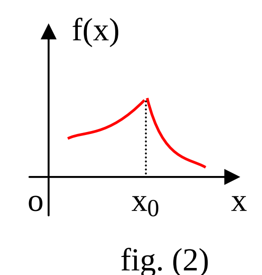


fig. (2)

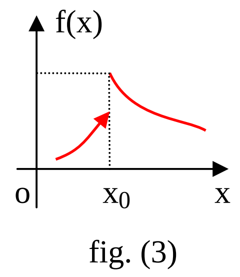


fig. (3)

<u>Teoremas que relacionan la derivada segunda de una función con su concavidad</u>.

Teorema 9) **H)** $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x_o) > 0$ **T)** **f** presenta concavidad positiva en $\mathbf{x_0}$

Teorema 10) **H)** $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x_o) < 0$ **T)** **f** presenta concavidad negativa en $\mathbf{x_0}$

Teoremas relativos a intervalos (a , b).

Teoremas que relacionan la derivada 1ra. con la variación de la función.

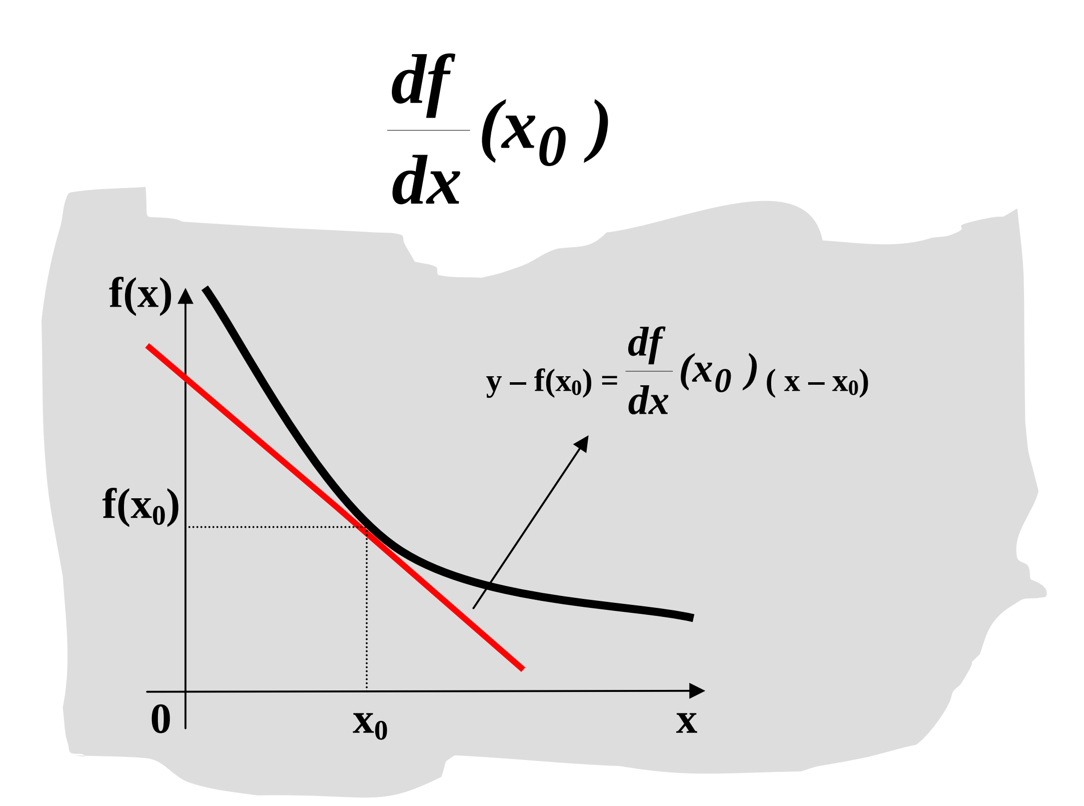
Teorema 11) **H)** $\frac{df}{dx} > 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f creciente en (a,b)

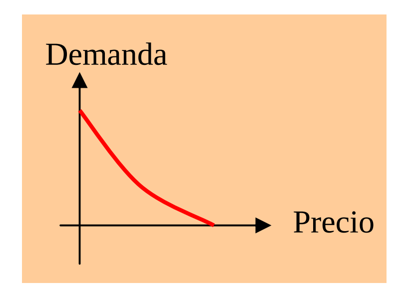
Teorema 12) **H)** $\frac{df}{dx} < 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f decreciente en (a,b)

Teorema 13) **H)** $\frac{d^2f}{dx^2} > 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f tiene concavidad > 0 en (a,b)

Teorema 14) **H)** $\frac{d^2f}{dx^2} < 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ **T)** f tiene concavidad < 0 en (a,b)

CAPITULO 1





NEWTON

$$\frac{dT}{dt} = K(A - T)$$

1 – 1 Introducción

1 – 2 Enunciados de ejercicios

1 – 3 Resolución de ejercicios

INTRODUCCION

Capítulo 1

INTRODUCCION

En este Capítulo 1 te proponemos ejercicios tratando de que valorices la derivada de una función en un punto como indicador matemático de la rapidez instantánea de variación o tasa instantánea de variación de una función.

En distintas disciplinas como Electricidad , Electrónica , Termodinámica , Mecánica , Economía , Biología , etc , resulta de importancia fundamental no sólo saber que determinada magnitud o cantidad varía respecto de otra , sino conocer cuán rápido se produce esa variación.

Puedes imaginar numerosos ejemplos de ello que seguramente te son familiares.

Pensemos , por ejemplo , en una persona que cae a un río cuyas aguas se encuentran a muy baja temperatura.

Es claro que la temperatura corporal será función del tiempo que la persona permanezca en el agua y claro también es que la función será decreciente al haber pérdida de calor del cuerpo hacia el agua tendiendo el mismo a alcanzar la temperatura del agua dada la diferencia de masa entre ambos.

Sin embargo en este problema resulta vital conocer la rapidez de disminución de la temperatura del cuerpo que por cierto no es lineal.

La disminución podría ser más rápida al principio de la caída e ir luego enlenteciéndose , ocurrir exactamente lo contrario , etc.

De toda esa información dependerá que sepamos cuanto tiempo se tiene aún disponible para salvar la vida de la persona , y esa información nos la dará justamente la derivada de la función en cuestión.

De hecho muchas cantidades o magnitudes que conoces se definen justamente como derivada de otra.

A título de ejemplo: la rapidez instantánea de un móvil se define como la derivada de la función espacio recorrido; la aceleración como derivada de la velocidad ; la fuerza electromotriz inducida , en Electrotecnia , como la derivada del flujo del campo magnético, todas ellas respecto de la variable tiempo (**t**). El ángulo de desplazamiento del eje de una viga , como derivada de la función "elástica de la viga"; la intensidad de corriente eléctrica como la derivada de la carga eléctrica

respecto del tiempo ; el gasto instantáneo , en Hidráulica , como derivada del volumen respecto del tiempo, etc.

Al respecto resulta importante que hayas entendido con claridad el significado de lo que en el curso teórico has llamado "Interpretación geométrica de la derivada" donde has demostrado que la derivada de una función **f** en un punto $\mathbf{x_0}$ $\left(\frac{df}{dx}(x_o)\right)$ representa el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico representativo de la función en el punto $\left[x_0, f(x_0)\right]$

Este resultado no es una mera curiosidad geométrica sino que su alcance es relevante.

Detengámonos en este punto para ayudarte a recordar.

Considera una función **f** de variable **x**. En la figura (1) tenemos parte del gráfico representativo de la función y sea $\mathbf{x_0}$ el punto del dominio que hemos elegimos para trabajar .

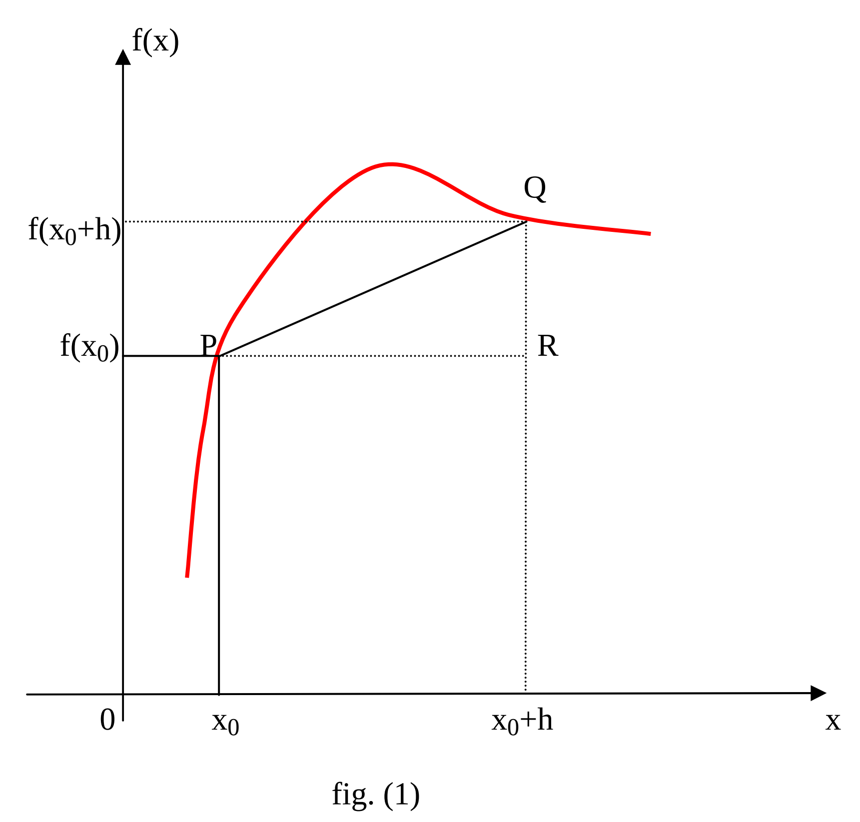


fig. (1)

Recuerda que llamamos "punto" al valor $\mathbf{x_0}$ y no al punto geométrico P.

Incrementamos ahora nuestra variable **x** en un valor **h** arbitrario y pasamos al nuevo punto $\mathbf{x_0 + h}$.

El incremento **h** puede ser tanto positivo como negativo. En el caso de la figura lo hemos tomado positivo moviéndonos en consecuencia hacia la derecha de $\mathbf{x_0}$.

Veamos que ha ocurrido con la función **f**.

En el punto $\mathbf{x_0}$ el valor funcional es $\mathbf{f(x_0)}$ y en el punto $\mathbf{x_0 + h}$ es $\mathbf{f\,(x_0 + h\,)}$.

La diferencia $\mathbf{f\,(x_0 + h\,) - f(x_0)}$ indica en valor y signo la variación del valor funcional provocado por el incremento **h** de la variable **x** .

A esa diferencia se le llama "incremento de la función en el punto $\mathbf{x_0}$ correspondiente al incremento **h** " En la figura (1) este incremento es la medida del segmento QR.

Consideremos ahora el cociente de ambos incrementos ,vale decir :

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

A este cociente se le denomina " <u>cociente incremental en el punto x_0</u>".

Es importante que comprendas que este cociente incremental indica la **rapidez** <u>**promedio**</u> <u>de variación de la función en el intervalo</u> [$\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_0 + h}$].

Si disminuímos el valor del incremento **h** iremos obteniendo nuevas tasas promedio de variación de la función , en general diferentes (excepto si la función es del tipo f(x) = Kx en cuyo caso el cociente incremental dará siempre constante e igual a K).

Si esa sucesión de valores del cociente incremental tiene límite finito para $\mathbf{h \longrightarrow 0}$ habremos obtenido la rapidez <u>**instantánea**</u> de variación de la función en $\mathbf{x_0}$.

Es al valor de ese límite que hemos llamado "**derivada de la función en el punto $\mathbf{x_0}$**"

Desde el punto de vista gráfico has visto que el cociente incremental es la tangente trigonométrica del ángulo QPR de vértice P, hecho que deduces de aplicar simplemente la definición trigonométrica de tangente en el triángulo PRQ y que te permite afirmar que el valor del cociente incremental es la pendiente o coeficiente angular de la recta PQ.

El paso al límite que has efectuado posteriormente te permite entonces concluir que el número real que has obtenido como derivada de la función **f** en el punto $\mathbf{x_0}$ no es más que el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto P.

Debes tener presente entonces que cuando calculas la derivada de una función **f** en un punto $\mathbf{x_0}$ obtienes el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $\mathbf{(x_0 , f(x_0))}$, pero la información que has conseguido no es

meramente una información geométrica.

Esta información te permite obtener la **rapidez** con que está variando la función en el punto considerado.

Cuanto mayor sea el valor absoluto de la derivada en el punto , más rápido varía la función en él , y esta información es de vital importancia en una variedad enorme de problemas de distintas disciplinas.

Ten presente que a la hora de resolver problemas de la realidad , aplicando modelos funcionales , nuestras funciones **f** representarán magnitudes o cantidades que varían en función de otras magnitudes o cantidades a las cuales representará nuestra variable **x** .

Por ejemplo si estás estudiando la variación en el tiempo de la energía **E** dada por un dispositivo de algún tipo , nuestra función **f** representará la función energía **E** , nuestra variable **x** representará al tiempo **t** y nuestras **f(x)** representarán los valores de **E(t)** .

Si calculas la derivada en algún instante $\mathbf{t_0}$, $\left[\frac{dE}{dt}(t_0)\right]$, habrás obtenido con qué **rapidez** está cediendo energía el dispositivo en ese instante medida , por ejemplo , en $\frac{\text{Calorías}}{\text{hora}}$, si esas son las unidades con que estás trabajando , digamos , en un problema de Termodinámica.

Esa derivada que has calculado no es otra cosa que la “**potencia**” del dispositivo en ese instante.

Después de definir derivada en un punto has visto el concepto de función derivada.

A esta nueva función , asociada a tu función original , debes concederle toda la importancia que realmente tiene.

Supongamos que has representado gráficamente cierta función **f** representativa de cierta magnitud interviniente en un fenómeno como función de otra magnitud , por ejemplo el tiempo.

La sola visualización de la curva te permite obtener variada información sobre lo que está ocurriendo en el fenómeno.

Conocerás cuándo la magnitud en cuestión aumenta y entre qué instantes , cuándo disminuye , cuando se producen sus máximos y/o mínimos y cuales son sus valores.

Pero puedes obtener aún más información cualitativa si imaginas como van variando

las pendientes de las rectas tangentes en los distintos puntos de la curva.

Podrás concluir , por ejemplo , si aumenta o disminuye la “**rapidez**” con que la función aumentaba o disminuía sus valores , podrás decidir eventualmente que tu función aumenta cada vez más rápido hasta cierto instante a partir del cual si bien sigue aumentando lo hace cada vez más lentamente (punto de inflexión de la gráfica) o a la inversa.

Tendrás entonces un panorama mucho más completo del desarrollo del fenómeno con toda la información adicional que te permite obtener la función derivada.

Es claro que si obtuvieras la expresión analítica de la función derivada podrías obtener datos cuantitativos de todo lo anterior , incluso la representación gráfica de la función derivada te permitiría tener una idea rápida y más acabada de cómo transcurre el fenómeno en estudio.

Esperamos que todo lo dicho te haga valorar , en su justa medida , el aprender a interpretar gráficas obteniendo de ellas toda la información que realmente contienen.

En muchos fenómenos , incluso , no es posible obtener una expresión analítica de la magnitud a estudiar , recurriéndose entonces a instrumentos adecuados para obtener su representación gráfica , procediéndose luego a la interpretación de la misma.

Piensa , por ejemplo , en los electrocardiogramas , sismogramas , poligramas (polígrafo o detector de mentiras) , etc.

LA DERIVADA COMO TASA DE VARIACION DE UNA FUNCION

ENUNCIADOS

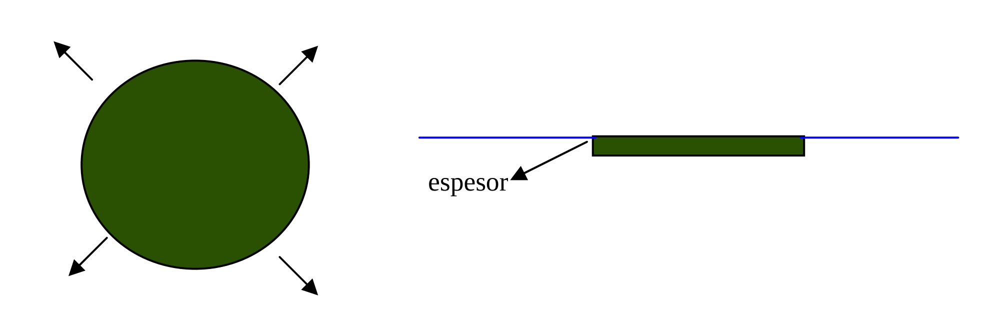
Ejercicio No. 1 – Química – (Resolución página 43)

La ley de **Boyle** para los gases perfectos establece que a temperatura constante **P.V=K** donde **P** es la presión, **V** el volumen y **K** una constante. Si la presión está dada por la expresión: **P(t) = 30 + 2t** con **P** en cm de Hg , **t** en seg ; y el volumen inicial es de 60 cm^3, determina la razón de cambio del volumen **V** con respecto al tiempo **t** a los 10 segundos.

Ejercicio No. 2 -Contaminación - (Resolución página 44)

Una mancha con forma de cilindro recto circular se ha formado al derramarse en el mar 100 m^3 de petróleo.

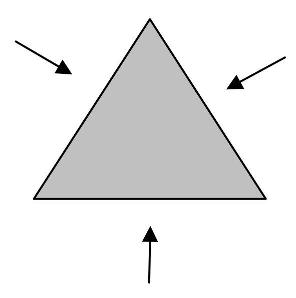
.



Calcula con qué rapidez aumenta el **radio** de la mancha cuando ese radio es de 50m si el espesor disminuye a razón de $10 \frac{cm}{hora}$ en el instante en que R = 50 m .

Ejercicio No. 3 - Geometría - (Resolución página 46)

El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de 4 cm^2 por minuto . Calcula la rapidez de variación de la **longitud** de sus lados cuando el área es de 200 cm^2.
Se supone que el triángulo se mantiene equilátero en todo instante.



Ejercicio No. 4 – Electrotecnia - (Resolución página 46)

Sean dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo. La resistencia equivalente R cumple: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Si R_1 y R_2 aumentan a razón de 0.01 y 0.02 Ω / seg. respectivamente, calcula la razón de cambio de **R** cuando $R_1 = 30\Omega$ y $R_2 = 90\Omega$.

Ejercicio No. 5 - Hidráulica - (Resolución página 47)

Una tolva con forma de cono recto circular invertido de radio de base **R** y altura **H** está siendo llenada con líquido con un gasto constante **Q** = 0.5 m^3 por minuto.

A medida que se produce el llenado el nivel del líquido en la tolva sube.

Si R=2 m y H=3m:

Q

a)¿ Crees que ese nivel sube con velocidad constante? Justifica tu respuesta sin efectuar cálculos.

b) Calcula ahora esa velocidad, verifica tu respuesta anterior e indica el valor de la velocidad cuando la altura del líquido en la tolva es de 1,5 m. ¿Qué condición crees que debería cumplir el recipiente para que el nivel subiera a velocidad constante? Justifica mediante cálculo en el caso que el recipiente sea un cilindro recto circular.

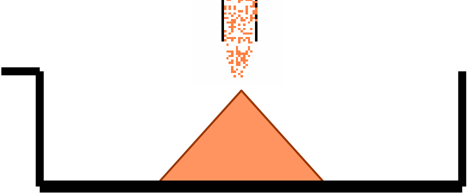
Ejercicio No. 6 – Química - (Resolución página 48)

Un globo esférico se llena con gas con un gasto constante **Q** = 100 litros /minuto. Suponiendo que la presión del gas es constante , halla la **velocidad** con que está aumentando el radio R del globo en el instante en que R=0.3 m.

Ejercicio No. 7 – Descarga de granos – (Resolución página 49)

La caja de un camión transportador de granos está siendo llenada con el grano proveniente de un silo a razón de 0.5 m^3 / min.

El grano forma un cono circular recto cuya altura es constantemente igual a 5/4 del radio de la base. Calcula:

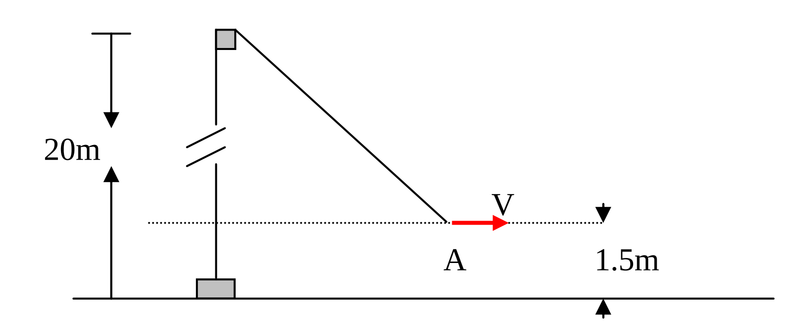


a) ¿A qué velocidad está subiendo el vértice del cono cuando la altura es de 1.50 m?
b) ¿ Cuál es el radio de la base del cono en ese momento y a qué velocidad está variando?

Ejercicio No. 8 – Física - (Resolución página 51)

Un cuerpo que pesa 0.5 toneladas es levantado verticalmente utilizando una eslinga de acero que pasa por una polea colocada a 20 m de altura, como indica la figura.

Un extremo se une directamente al cuerpo y el otro, (punto A), es arrastrado por un vehículo que se mueve hacia la derecha con velocidad v=20 km / hora y a una altura del piso de 1.50 m. La eslinga tiene una longitud de 50 m..



Te pedimos :

a)¿A qué distancia del cuerpo estará el vehículo en el instante de iniciar la maniobra?
b) En cierto instante **t** el cuerpo se halla a cierta altura **h** respecto del piso y el vehículo a cierta distancia **x** del cuerpo. Encuentra la relación entre **x** y **h**.
c) ¿ Cuál es la velocidad del cuerpo en el instante en que su altura es de h= 6 m?

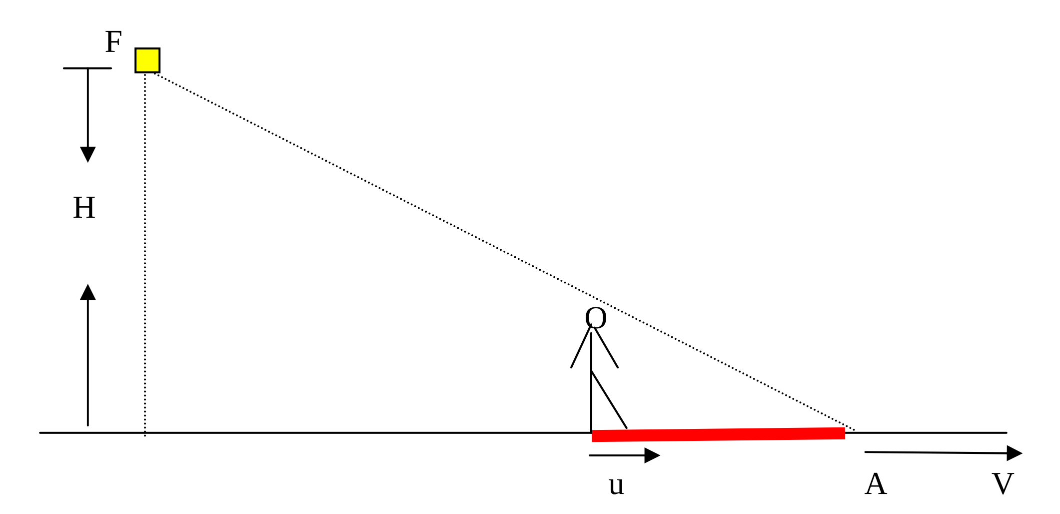
Ejercicio No. 9 - Física - (Resolución página 52)

Un foco de luz está colocado a una altura de **H** metros sobre el nivel del suelo.
Una persona de altura **h** metros pasa por la vertical del foco moviéndose a velocidad velocidad constante **u** m / seg .

a) Calcula la velocidad **V** con que se mueve el extremo A de su sombra, en función de **H** , **h** y **u** .

b) ¿ Cuál es esa velocidad si el foco luminoso está situado a 4m del nivel de la calle, la persona mide 1.75 de altura y camina a una velocidad de 1 m / seg ?

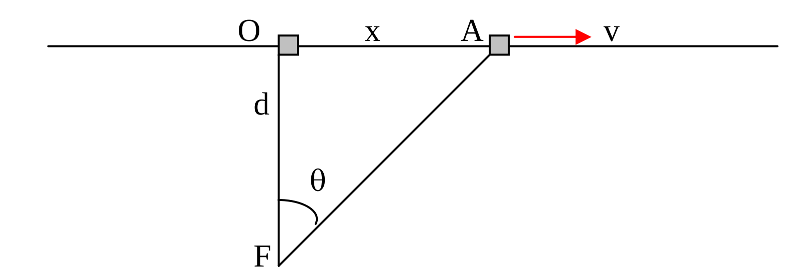
c) Supongamos ahora que una segunda persona camina acompañando a la anterior. Investiga si es posible que la velocidad del extremo de la sombra de esta segunda persona sea **doble** de la velocidad **V** de la primera .



Ejercicio No 10 – Física – (Resolución página 54)

Un automóvil recorre una carretera rectilínea con movimiento uniforme cuya velocidad tiene módulo **v ,** mientras un reflector colocado en el punto F a distancia **d** de la carretera lo ilumina constantemente, para lo cual se va girando sobre un eje.
Tomando tiempo t=0 cuando el móvil pasa por el punto O y suponiendo que en un instante posterior **t** aquél ha recorrido una distancia **x** como se indica en la figura , te preguntamos:

a) ¿Cuál es la relación entre el ángulo θ y la distancia x ?



b) Recordando que la velocidad angular **ω** de un movimiento circular es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

i)¿Crees que el movimiento del reflector es circular uniforme? Busca una justificación sin realizar cálculos.

ii) Encuentra la relación entre **ω** y **x** , bosqueja esa relación y verifica tu respuesta a la pregunta anterior.

c) Calcula ω para x =0 y x = 50 m , siendo d = 100 m y v = 72 Km / h.

d) Recordando que el movimiento del vehículo es rectilíneo uniforme y por tanto **x = v.t** , encuentra la expresión de ω(t) .

e) Siendo la aceleración angular del movimiento circular γ = dω / dt , calcula esa aceleración γ para x =0 y x = 50m.

Ejercicio No. 11 – Demanda – (Resolución página 56)

Una fábrica vende **q** miles de artículos fabricados cuando su precio es de **p** U$S /unidad.

Se ha determinado que la relación entre **p** y **q** es:

$$q^2 - 2q\sqrt{p} - p^2 - 31 = 0$$

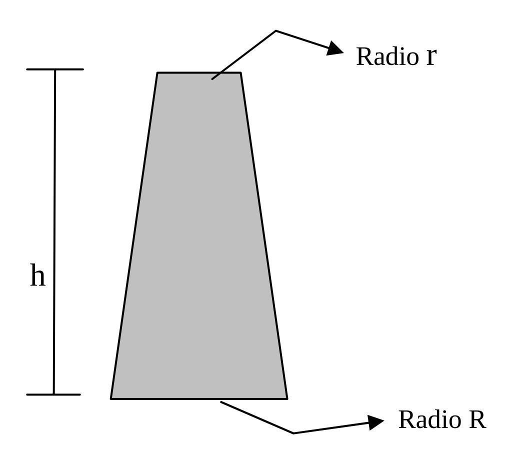
Si el precio **p** del artículo es de **9** U$S y se incrementa a una tasa de 0,20 U$S por semana , te pedimos :

a) Calcula el número de artículos vendidos a 9 dólares.

b) ¿ Con qué rapidez cambia la cantidad de unidades **q ,** vendidas por semana cuando el precio es de **9** U$S?

Ejercicio No. 12 – Forestación – (Resolución página 57)

Para estimar la cantidad de madera que produce el tronco de un árbol se supone que el mismo tiene la forma de cono truncado como indica la figura.



siendo: **r** el radio de la base superior; **R** el radio de la base inferior y **h** la altura.

Recordando que el volumen **V** de un tronco de cono está dado por la expresión:

$$V = 1/3 .\pi.h.(R^2+R.r+r^2)$$ te preguntamos:

¿Cuál es la rapidez de variación del volumen **V** en el momento en que: r =60cm , R = 90 cm y h = 15m , si el incremento de **r** es de 10 cm / año, el incremento de **R** es de 15 cm / año y el de **h** de 25 cm / año?

Ejercicio No.13 – Contaminación – (Resolución página 58)

Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario **C** de monóxido de carbono CO_2 en el aire , en partes por millón (ppm) , en una ciudad , está relacionado con la población **p** expresada en miles de habitantes por la siguiente

expresión :

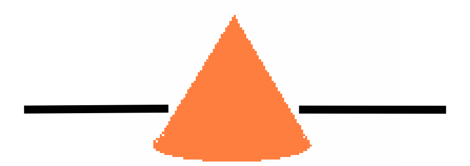
$$C(p)=\sqrt{\frac{p^2}{2}+17}$$

El aumento de población en esa ciudad en **t** años se estima que está dado por la relación siguiente: $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1\ t^2$ en miles de habitantes.

¿ Con qué rapidez crees que estará variando la concentración de CO_2 en esa ciudad dentro de 3 años?

Ejercicio No.14 – Variación de volumen – (Resolución página 59)

Un camión descarga arena formándose un montículo que tiene la forma de cono recto circular. La altura **h** va variando manteniéndose constantemente igual al radio **r** de la base.

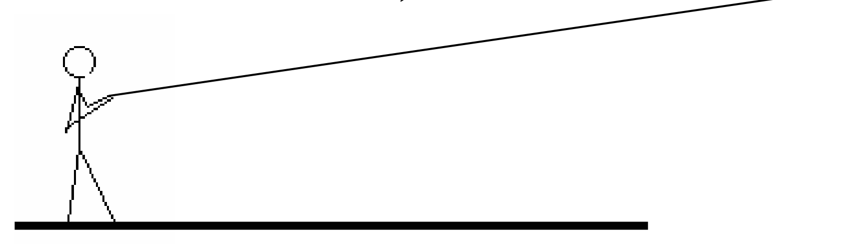


Cuando la altura es de 1m. ella está aumentando a razón de 25 cm / minuto.

¿ Con qué rapidez está cambiando en ese instante el volumen **V** de arena?

Ejercicio No.15 – Física – (Resolución página 60)

Un niño sostiene el manojo de hilo de una cometa a 1,50 m del suelo. La cometa se desplaza horizontalmente a una altura de 81,5 m.



Te pedimos que calcules a qué velocidad debe el niño soltar hilo en el momento en que la cometa está a 100m de él si la velocidad de la cometa es de 20 m / min.

Ejercicio No. 16 - Termodinámica – (Resolución página 61)

Una bebida se saca del refrigerador a una temperatura de 10^0 C y se deja en una habitación donde la temperatura es de 25^0 C.

Según la ley de enfriamiento de Newton (calentamiento sería en este caso el término apropiado) la temperatura T de la bebida variará en el tiempo de acuerdo a la expresión:

$T(t) = 25 - A.e^{-kt}$ con A y k constantes.

a) Sabiendo que al cabo de 20 minutos la temperatura de la bebida es de 15^0 C, calcula las constantes A y k.

b) Bosqueja el gráfico de la función **T** para $t \geq 0$ y encuentra la expresión de la rapidez instantánea de calentamiento de la bebida.

c) Encuentra el instante en que esa rapidez es **máxima** y el instante en que ella es la mitad de la **máxima.**

d) ¿Cuál será la temperatura de la bebida al cabo de una hora?

Ejercicio No. 17 – Electricidad – (Resolución página 64)

La carga eléctrica **Q** que atraviesa la sección de un conductor está dada por la expresión:

$$Q(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t)$$

siendo A y ω constantes:

a) Grafica **Q** en función de **t** en un período.

b) Recordando que la intensidad **I** de la corriente indica la rapidez con que varía la carga **Q** que atraviesa la sección del conductor , deduce de la gráfica de la parte **a)** los instantes en que **I** es **máxima** y **mínima**.

c) Verifica con el cálculo tus respuestas a la parte anterior.

d) Calcula en qué instante la intensidad **I** en valor absoluto es la mitad del valor **máximo**.

Ejercicio No.18 – Propagación de epidemia - (Resolución página 66)

Un estudio realizado durante una epidemia que se propagó entre los animales del rodeo vacuno de nuestro país mostró que el número de animales afectados, **t** días después de iniciado el brote, respondió a una expresión del tipo:

$$n(t) = \frac{N}{1 + A.e^{-K.t}}$$

N y A constantes, A>1,donde **N** era el número total de animales del rodeo nacional.

a) Demuestra que la **máxima** velocidad de propagación de la enfermedad ocurrió cuando se infectó la mitad del rodeo.

b) Bosqueja la función **n** para $t \geq 0$, y la función velocidad de propagación **V**.

Ejercicio No.19 – Propagación de rumor – (Resolución página 68)

En una población de **P** habitantes se desea estudiar la velocidad de propagación de un rumor.

Se adopta para ello un modelo matemático que indica que el número **N** de personas que en un instante **t** han oído el rumor puede expresarse por la relación:

$$N(t) = P\left(1 - e^{-K.t}\right) \qquad \text{con: K cte., } K>0, \; t \text{ en horas y } K \text{ en } (1/\text{hora})$$

a) Si K=0,1 , calcula el tiempo transcurrido para que el 60% de la población conozca el rumor, y la velocidad de propagación del mismo en ese momento.

b) Grafica N (t) para $t \geq 0$ e indica en qué momento la velocidad de propagación del rumor es **máxima**.

c) Demuestra que el modelo matemático adoptado consistió en suponer que la velocidad de propagación del rumor fue proporcional al número de personas que en un instante **t** todavía no lo habían oído.

Ejercicio.20 – Población de bacterias – (Resolución página 70)

La población **P** de una colonia de bacterias con espacio y alimentos ilimitados, varía con el tiempo de acuerdo a la expresión: $P(t)= C.\, e^{K.t}$ con C y K constantes, **t** en horas y **K** en 1 / hora.

a) Si en el instante inicial t = 0 la población era de 1000 bacterias y al cabo de 1 hora la misma se duplicó, determina los valores de C y K.

b) Bosqueja el gráfico de la función **P**, halla la velocidad **v** de crecimiento de la población en función de **t** y determina el instante de **mínima** velocidad.

c) Calcula la población al cabo de 2 horas y la velocidad de crecimiento en ese instante.

d) Demuestra que el modelo matemático adoptado para el estudio del problema consistió en suponer que la velocidad de crecimiento de la población en un instante fue proporcional al número de bacterias en ese instante.

Ejercicio No.21 – Variación de la población – (Resolución página 71)

Un modelo matemático para estudiar la variación de la población mundial **P** ha supuesto que la misma está expresada por :

$$P(T) = 5.e^{0.0278\, t}$$

con **P** en miles de millones de personas y **t** en años.

En este modelo se han considerado constantes la tasa de natalidad (nacimientos por año) y de mortalidad (defunciones por año).

Tomando t= 0 en el año l987:

a) Bosqueja **P** como función de **t** para **t** ≥ 0.

b) Calcula la tasa de variación instantánea de la población en el año l987.

c) Calcula la población prevista para el año 2005 y la tasa de variación instantánea en ese año.

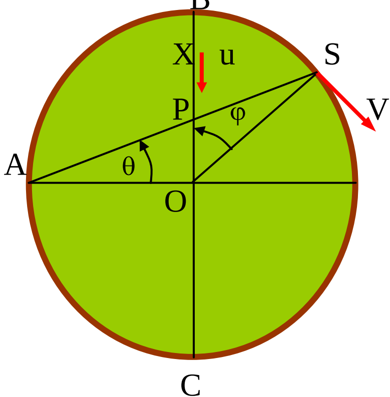
d) ¿ En qué tiempo se duplicaría la población existente en 1987 y cuando alcanzaría los 15.000 millones?

e) ¿Crees adaptado a la realidad este modelo matemático?

f) Demuestra que en este modelo la tasa instantánea de crecimiento en un instante **t** se ha supuesto proporcional a la población existente en ese instante, y que la constante de proporcionalidad vale 0.0278.

Ejercicio No.22 –Iluminación – (Resolución página 72)

Un terreno circular de radio **R** se ilumina con un foco colocado en el punto A como indica la figura.



Un móvil recorre el segmento BC con movimiento rectilíneo uniforme de velocidad **u** mientras su sombra S proyectada sobre el muro perimetral describe un movimiento circular de velocidad **V**. (**u** y **V ,** módulos).

En un instante **t** cualquiera el móvil se encuentra en un punto P, siendo **x** la distancia BP y **s** la longitud del arco BS. Recuerda que: s = R.

a) Halla la relación entre θ y φ y calcula θ en función de x .

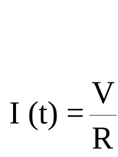
b) Encuentra la expresión de V como función de x.

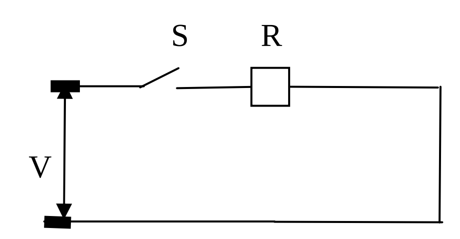
c) Tomando t=0 cuando el móvil pasa por el punto B , bosqueja la función **V** e indica en qué posiciones del móvil la velocidad de la sombra es **máxima** y **mínima** para **x** variando entre 0 y 2R.

d) Calcula la velocidad de la sombra cuando el móvil pasa por el punto medio del segmento BO, e indica cuál es el porcentaje de esa velocidad respecto de la velocidad **máxima.**

Ejercicio No.23 –Electrotecnia – (Resolución página 75)

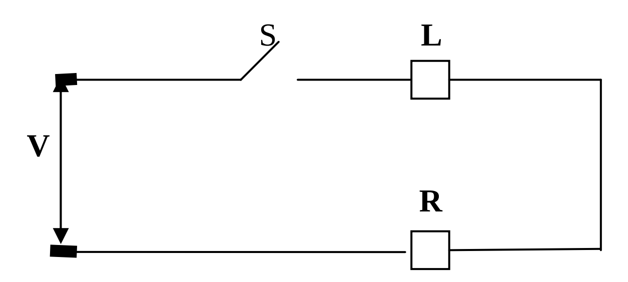
Considera el circuito de la figura donde una tensión constante de **V** voltios se aplica sobre una resistencia **R** (Ω) cerrando instantáneamente la llave S en el instante t=0. Se establece entonces en el circuito una corriente de intensidad **I** en Amp. que está expresada por la ley de OHM:





a) Grafica I (t) ; $\forall\ t \geq 0$.

b) Supongamos que ahora agregamos al circuito una bobina de autoinducción constante , de **L** Henrios, y repetimos la operación.



La corriente que circula viene expresada ahora por: $I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

τ = L / R en seg , **I** en Amp., **t** en seg.

Al valor (τ) se le llama " **CONSTANTE DE TIEMPO**" del circuito.

c) Bosqueja el gráfico de I(t) ,$\forall\ t \geq 0$.

Deduce , comparando los bosquejos de las partes **a)** y **b)** cual ha sido el efecto de introducir la bobina en el circuito.

d) Calcula la rapidez de variación de I(t) en t=0 y en t=τ .

e) ¿Cómo actuarías sobre las constantes del circuito para , sin variar el valor final de la corriente, lograr que ella aumente sus valores más rápidamente ?

Ejercicio No. 24 – Electrotecnia – (Resolución página 78)

Considera el circuito de la figura donde un condensador cargado de capacidad **C** (Faradios) y tensión inicial de **V** (voltios) entre sus placas, se descarga sobre una resistencia **R** (Ω).

Al cerrar la llave S comienza a circular una corriente de intensidad **I** dada por la expresión:

$$I(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(τ = RC constante. de tiempo)

a) Bosqueja I (t)

b) ¿ Cuál es el valor **máximo** de I (t) ?

c) Calcula la rapidez de variación de **I** en $t = 0$ y $t = \tau$.

d) Encuentra qué porcentaje del valor máximo de **I** alcanza la corriente para $t=\tau$.

e) ¿Cómo actuarías sobre los elementos del circuito para , sin variar el valor inicial de la corriente, lograr que ella disminuyera sus valores más rápidamente?

LA DERIVADA COMO TASA DE VARIACION DE UNA FUNCION

RESOLUCIONES

Ejercicio No.1

Se te pide en este ejercicio que determines la velocidad de cambio del volumen respecto del tiempo en el instante t = 10 seg , o sea , el valor de la derivada $\frac{dV}{dt}$ calculada en t = 10.

La idea será entonces expresar el volumen **V** en función del tiempo **t**.

Por un lado la ley de Boyle establece que P.V = K y por otro conocemos como varía la presión con el tiempo: $P(t) = 30 + 2.t$

Basta entonces que despejemos el volumen de la ley de Boyle y luego sustituyamos la presión por su expresión en **t**. Tendremos entonces:

$$V(t) = \frac{K}{P(t)}$$

Sustituyendo P(t) obtenemos finalmente:

$$V(t) = \frac{K}{30 + 2.t} \qquad (1)$$

Derivemos (1) y hallemos su valor en t = 10

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2K}{(30 + 2.t)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dV}{dt}(10) = -\frac{2K}{50^2}$$

El dato de que el volumen inicial es de 60 cm^3 nos permite calcular la constante K.

En efecto, para t=0 deberá ser V= 60.

Sustituyendo en (1): $60 = \frac{K}{30} \qquad \Rightarrow \quad K=1800$

$$\frac{dV}{dt}(10) = -\frac{3600}{2500} = -1.44 \ \frac{cm^3}{seg}$$ El signo negativo indica disminución.

En definitiva el gas está disminuyendo su volumen a razón de 1.44 cm^3 por seg a los 10 seg. de iniciado el proceso de compresión.

Veamos otra forma de resolver el ejercicio.

Como la presión y el volumen son funciones de **t** la ley de Boyle establece:

$$(1) \quad p(t).V(t) = K \qquad \forall t \geq 0$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (1) obtienes:

$$\frac{d(p.V)}{dt} = \frac{dK}{dt} \qquad \forall t \geq 0$$

En el primer miembro tenemos la derivada de un producto y en el segundo de una constante, por tanto:

$$p\frac{dV}{dt} + V\frac{dp}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{V}{p}\frac{dp}{dt} \qquad (2)$$

Como nos interesa el instante t=10 debemos calcular , para sustituir en la relación (2): $V(10)$, $p(10)$ y $\frac{dp}{dt}(10)$.

De $p = 30 + 2.t$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} p(10) = 50 & p(0)=30 \\ \frac{dp}{dt}(t) = 2 & \frac{dp}{dt}(10) = 2 \end{cases}$

De Boyle: $\begin{cases} p(10).V(10) = K \Longrightarrow V(10) = \frac{K}{50} \\ p(0).V(0) = K \Longrightarrow K = 30.60 = 1800 \end{cases}$

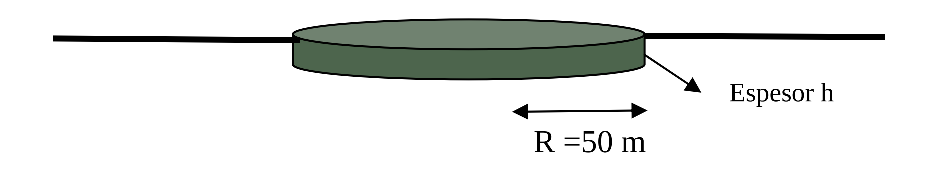
Haciendo la sustitución de valores en (2) encontramos la solución ya conocida.

$$\frac{dV}{dt}(10) = -1.44 \quad \frac{cm^3}{seg}$$

De esta forma se resuelve el ejercicio sin explicitar V(t).

Ejercicio No. 2

Debes hallar en este ejercicio la velocidad con que aumenta el radio R a medida que la mancha se expande sobre la superficie del mar, en el instante en que R = 50m.



Podríamos pensar en hallar la expresión R(t) para derivarla posteriormente.

Sin embargo no se te indica como dato del problema la forma en que el espesor **h** varía con el tiempo por lo que no lograremos encontrar R(t).

Debes encarar el ejercicio partiendo de la relación entre **R** y **h** que nos proporciona el volumen de la mancha que sabemos se mantiene constante.

Tendremos:

$$V = \pi . R^2 . h \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

Derivemos ambos miembros de la igualdad (1) respecto de (t):

$$\Rightarrow \qquad \frac{dV}{dt} = \pi \left(2R \frac{dR}{dt} . h + R^2 \frac{dh}{dt} \right) \qquad (2)$$

Como **V** es constante, es decir independiente de **t** , sabemos que: $\frac{dV}{dt} = 0$ lo que nos permite concluir de (2) que: $2R \frac{dR}{dt} . h + R^2 \frac{dh}{dt} = 0$

Despejando $\frac{dR}{dt}$ obtenemos: $\frac{dR}{dt} = \frac{-R}{2h} . \frac{dh}{dt}$ (3)

Como tenemos el dato de que la altura de la mancha <u>disminuye</u> a razón de 10 $\frac{cm}{hora}$

será : $\frac{dh}{dt} = -10^{-2} \ \frac{m}{hora}$

De la relación (1) , $h = \frac{V}{\pi R^2}$

Como V = 100 m^3, R =50 m $\Rightarrow$ $h = \frac{100}{\pi . 50^2} = \frac{0.04}{\pi}$ m

Sustituyendo valores en la ecuación (3) se tiene finalmente:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{50.\pi}{2.(0.04)} . 10^{-2} = 6.25\pi \quad \frac{m}{hora}$$

La velocidad con que aumenta el radio de la mancha cuando ese radio es de 50 m , resulta entonces cercana a los 20 $\frac{m}{hora}$.

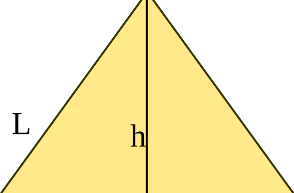
Ejercicio No.3

Si llamamos L al lado del triángulo equilátero, siendo su altura $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ su área A

será:



(1) $A = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$



con A=A(t) y L= L(t) .

Se te pide la rapidez de variación de la longitud de los lados por lo que debes calcular $\frac{dL}{dt}$ para A = 200 cm^2.

Derivando respecto de **t** la igualdad (1) obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}.2L.\frac{dL}{dt} \quad (2)$$

De la expresión (2) debemos despejar $\frac{dL}{dt}$ y sustituir $\frac{dA}{dt}$ y L por sus valores correspondientes al instante en que A = 200 cm^2

De (1): $200 = \frac{\sqrt{3}}{4}.L^2 \Rightarrow L \cong 21.5 \text{ cm}$ y teniendo en cuenta que $\frac{dA}{dt} = -4\frac{cm^2}{min.}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dL}{dt} \cong \frac{-8}{21{,}5.\sqrt{3}} \cong -0.21 \ \frac{cm}{min}$$

Los lados están entonces disminuyendo sus longitudes a la velocidad calculada.

Ejercicio No.4

Como $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$ siendo R , R_1 y R_2 funciones de **t**.

Derivando la última expresión respecto de **t** tendremos:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\left(\frac{dR_1}{dt}.R_2 + R_1.\frac{dR_2}{dt}\right)(R_1 + R_2) - R_1.R_2.\left(\frac{dR_1}{dt} + \frac{dR_2}{dt}\right)}{(R_1 + R_2)^2}$$

Operando y simplificando obtienes:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R_1^2.\frac{dR_2}{dt} + R_2^2.\frac{dR_1}{dt}}{(R_1 + R_2)^2}$$

Siendo: $\frac{dR_1}{dt} = 0.01 \ \frac{\Omega}{seg}$ y $\frac{dR_2}{dt} = 0.02 \ \frac{\Omega}{seg}$, $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 90\Omega$

Sustituyendo valores obtienes:

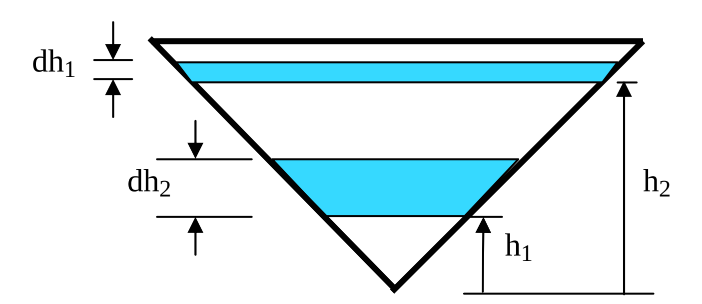
$$\frac{dR}{dt} = \frac{900.2.10^{-2} + 8100.10^{-2}}{120^2} \cong 68{,}75.10^{-4} \ \frac{\Omega}{seg}$$

La resistencia equivalente R está entonces aumentando con la rapidez calculada.

Ejercicio No. 5

a) La respuesta a la pregunta es NO.

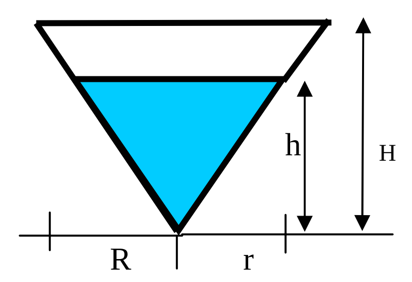
Tratemos de justificarla , para lo cual supongamos dos instantes diferentes t_1 y t_2



a los cuales corresponden niveles h_1 y h_2 respectivamente , como indica la figura. Consideremos intervalos de tiempos iguales "dt" en ambos instantes. Los volúmenes que ingresarán serán iguales por ser el gasto de entrada constante , y ocuparán los volúmenes indicados.

Los troncos de cono deben ir disminuyendo sus alturas "dh" a medida que **h** aumenta y consecuentemente la velocidad de la superficie irá disminuyendo a medida que **h** aumenta.

El cálculo de la parte **b)** nos confirmará que la velocidad $v = \frac{dh}{dt}$ es una función decreciente con **h**.



b) Consideremos que el líquido , en un instante **t**, ocupa el volumen sombreado. Calculemos ese volumen, que será el volumen ingresado al recipiente en el tiempo **t**.

Hemos considerado t =0 en el instante en que se comienza el llenado.

Tratemos de encontrar ahora la relación entre **r** y **h** . Para ello podemos valernos del teorema de Thales o del cálculo trigonométrico.

R
H
r
h
θ

$$\text{tg}\,\theta = \frac{R}{H} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R.h}{H}$$

El volumen será entonces: $V = \frac{\pi}{3}.\frac{R^2}{H^2}.h^3$ siendo **V** y **h** funciones de **t**.

Derivando respecto de **t** la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^2}{3H^2}.3h^2.\frac{dh}{dt} = \frac{\pi R^2}{H^2}.h^2.\frac{dh}{dt}$$

Como $Q = \frac{dV}{dt}$ de la expresión anterior concluímos:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{Q.H^2}{\pi.R^2.h^2}$$

La velocidad resulta entonces función decreciente de **h** con lo que el cálculo confirma el razonamiento de la parte anterior.

Para los valores dados tendremos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5\left(3^2\right)}{\pi.2^2.1.5^2} \cong 0.16\frac{m}{min.} = 16\frac{cm}{min.}$$

c) El razonamiento hecho en la parte **a)** del ejercicio nos conduce a afirmar que el recipiente debería tener sección horizontal constante. En el caso de cilindro circular tendremos: $V = \pi.R^2.h$ con R constante.

Derivando respecto de (t): $\frac{dV}{dt} = \pi.R^2.\frac{dh}{dt}$

Finalmente: $v = \frac{dh}{dt} = \frac{Q}{\pi R^2} \Rightarrow$ v constante.

Ejercicio No. 6

Siendo el globo esférico de radio **R** su volumen **V** será:

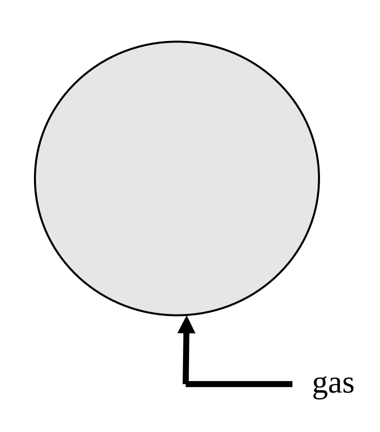
$$V = \frac{4}{3}.\pi.R^3 \qquad (1)$$

Ambos , **V** y **R** son funciones del tiempo durante el inflado del globo.

Como se te pide la velocidad con que varía el radio cuando su valor es de 0.3 m, deberás hallar el valor de la derivada de R respecto del tiempo para el valor de R indicado.

Comencemos entonces derivando la expresión (1). Tendremos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3}.3R^2.\frac{dR}{dt} = 4\pi.R^2\frac{dR}{dt} \qquad (2)$$



El gasto de gas para el llenado es :

$$Q = \frac{dV}{dt} = 100 \ \frac{dm^3}{min}$$

Sustituyendo valores en (2) obtenemos

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{100}{4\pi.3^2} = \frac{25}{9\pi} \ \frac{dm}{min}$$

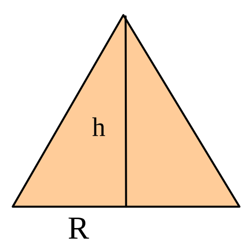
El radio aumenta entonces con una velocidad cercana a $9 \ \frac{cm}{min}$ en el instante en que R =30 cm.

Ejercicio No. 7

A medida que se produce la descarga del grano la relación entre el radio de la base y la altura se mantiene constante e igual a 4 / 5 por lo que los distintos conos son semejantes. El vértice del mismo sube verticalmente mientras que la circunferencia base aumenta su radio horizontalmente.

a) En esta parte se te pide que calcules la velocidad con que está subiendo el vértice.

Llamando **h** a la altura del cono deberás calcular $\frac{dh}{dt}$ en el instante en que h = 1.5 m



El volumen de grano en un instante **t** será :

$$V = \frac{1}{3}.\pi.R^2.h$$

Como $h = \frac{5}{4}.R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{4}{5}.h$ Finalmente entonces:

$$V(t) = \frac{16}{75}.\pi.h^3 \qquad (1) \qquad \text{con } h=h(t)$$

Derivando la expresión (1) respecto de **t** obtienes:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{16}{25}.\pi.h^2.\frac{dh}{dt} \qquad (2)$$

Siendo $\frac{dV}{dt} = Q = 0.5\frac{m^3}{min}$ **Q** gasto de descarga del grano, h = 1.5 m

sustituyendo valores en (2) y despejando tendremos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{8.2,25.\pi} \cong 0.44 \ \frac{m}{min}$$

Esta es la velocidad con que sube el vértice del cono de grano en el instante en que h =1.5 m.

b) Siendo $R = \frac{4}{5}.h$ en todo instante **t** , derivando esta igualdad obtenemos la relación entre las derivadas de **R** y **h**.

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dh}{dt}$$

Como se te pide la velocidad de variación del radio en el mismo instante en que se te pidió la velocidad de variación de la altura , tendrás:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4}{5}.0,.44 \cong 0.35 \ \frac{m}{min}$$

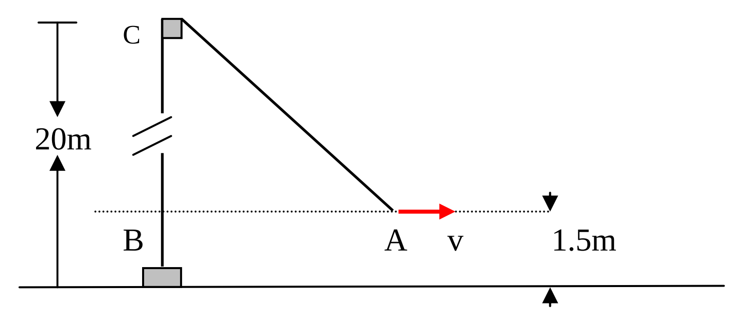
El valor correspondiente del radio es:

$$R = \frac{4}{5}.1,5 = 1,20 \ m$$

Ejercicio No. 8

a) Posición inicial

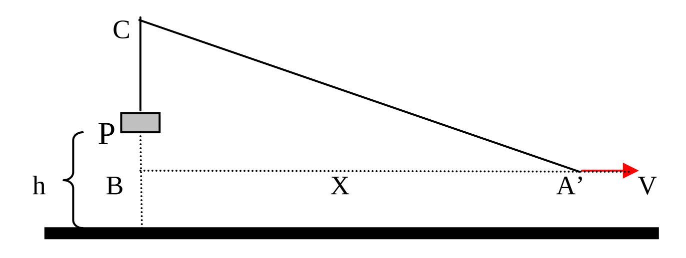
Deseamos calcular la distancia AB para lo cual utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC.



$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 - d_{BC}^2$ $\quad d_{BC} = 20 - 1.5 = 18.5\,m \quad d_{AC} = 50 - 18.5 = 31.5m$

$\Longrightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{31.5^2 - 18.5^2} \cong 25.5 \ m$

b) Posición en un instante **t**.



:

Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo A’ BC obtienes:

CP = 20 – h   AC = 50 – (20 –h)= 30 + h   BC = 18.5 m

$$\Longrightarrow \quad X^2 = (30 + h)^2 - 18.5^2 \qquad (1)$$

c) Las velocidades del vehículo y del cuerpo serán respectivamente:

$$\text{velocidad del vehículo:} \quad v = \frac{dX}{dt} \qquad \text{Velocidad del cuerpo:}\ V = \frac{dh}{dt}$$

Derivando respecto de **t** la relación (1) se obtiene:

$$2.X.\frac{dX}{dt} = 2(30+h).\frac{dh}{dt} \qquad (2)$$

En el instante pedido se cumple:

$$v = 3\ Km/h \qquad h = 6\ m \qquad X = \sqrt{(30+6)^2 - 18.5^2} \cong 31\,m$$

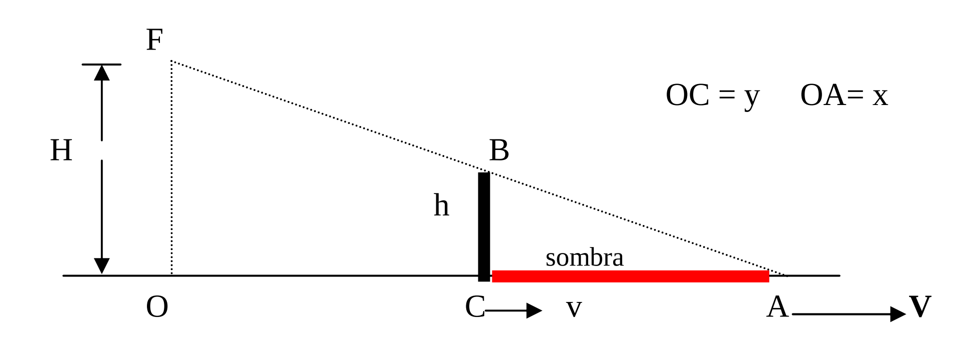
Despejando $\frac{dh}{dt}$ en (2) y sustituyendo valores encontramos que:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{X}{30+h}.\frac{dX}{dt} = \frac{\sqrt{(30+6)^2 - 18.5^2}}{30+h}\frac{dX}{dt} \cong 2.58\,\frac{Km}{h}$$

La velocidad con que está subiendo el cuerpo cuando su altura es de 6m es entonces de aproximadamente 2.58 Km / h ≅ 0.7 m / seg.

Ejercicio No.9

a)



Consideremos que en un instante **t** la situación es la indicada en la figura.

Deseamos calcular la velocidad V del punto A, extremo de la sombra.

De acuerdo a las notaciones elegidas tendremos

$$V=\frac{dx}{dt} \qquad\qquad v=\frac{dy}{dt}$$

Usando la semejanza de los triángulos ABC y AFO o calculando la cotangente del ángulo $B\overset{\angle}{A}C$ concluimos que $\frac{x}{H}=\frac{x-y}{h}$ (Recuerda que $\cot g\theta=\frac{1}{tg\theta}$)

Despejando (x): $x=\frac{H.y}{H-h}$ (1)

Derivemos la expresión (1) respecto de **t** :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{H}{H-h}.\frac{dy}{dt}$$

Finalmente entonces:

$$V=\frac{H}{H-h}v \qquad (2)$$

Como H y h son constantes la relación anterior indica que la velocidad de la sombra es proporcional a la de la persona y por tanto **constante** , con lo que el punto A se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.

Como $H>h>0 \Longrightarrow \frac{H}{H-h}>1 \Longrightarrow V>v$ lo que explica porqué la sombra va aumentando su longitud a medida que la persona se aleja del foco luminoso.

b) Siendo H = 4 m h = 1.75 m v = 1 m /seg obtenemos , sustituyendo en (2):

$$\underline{V \cong 1.78 \text{ m / seg}}.$$

c) Para responder a la pregunta tratemos de hallar la altura **h** de esta segunda persona.

Despejando **h** de la expresión (2) obtenemos:

$$h=H\left(1-\frac{v}{V}\right)$$

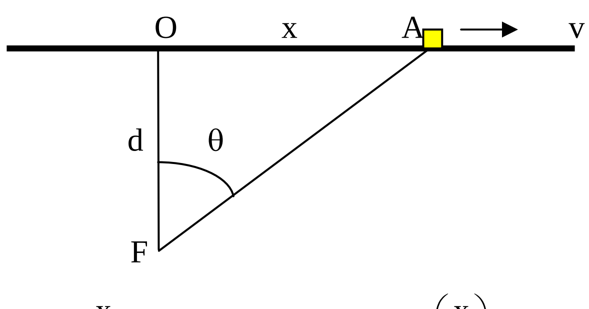
Aplicándola a la segunda persona será H=4 m v=1 m/seg V=2.(1.78) m/seg

$$\Longrightarrow \qquad \underline{H \cong 2.88 \text{ m}}$$

Parece obvio que la respuesta es que lo planteado **no es posible**.

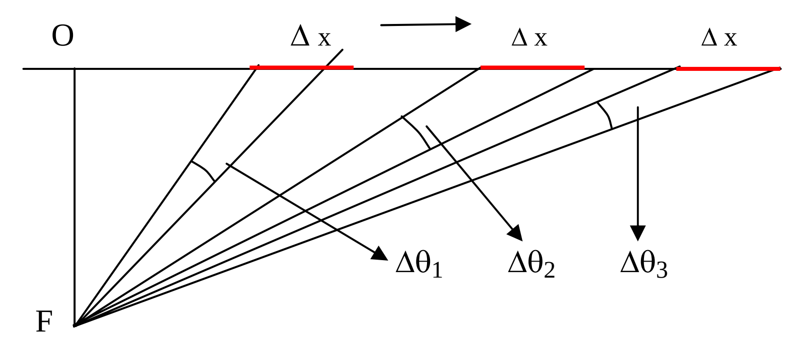
Ejercicio No. 10

a) Para hallar la relación pedida basta que consideres el triángulo FOA y apliques definición de tangente.



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{d} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{d}\right) \qquad (1)$$

b) i) Tomando intervalos iguales de tiempo Δt la distancia Δx recorrida por el vehículo deberá ser la misma por ser su movimiento rectilíneo uniforme .



Hemos tomado intervalos de igual longitud Δx y hemos indicado en la figura los ángulos $\Delta\theta$ correspondientes.

Parece claro que se cumplirá: $\Delta\theta_1 > \Delta\theta_2 > \Delta\theta_3$........ lo cual nos inclinaría a afirmar que **ω** debe ir disminuyendo a medida que aumenta **x** .

ii) Como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ derivamos la expresión (1) respecto del tiempo.

Recordando la derivada de la función Arctg obtendremos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{d}}{1+\left(\frac{x}{d}\right)^2}.\frac{dx}{dt} = \frac{d}{d^2+x^2}.\frac{dx}{dt}$$

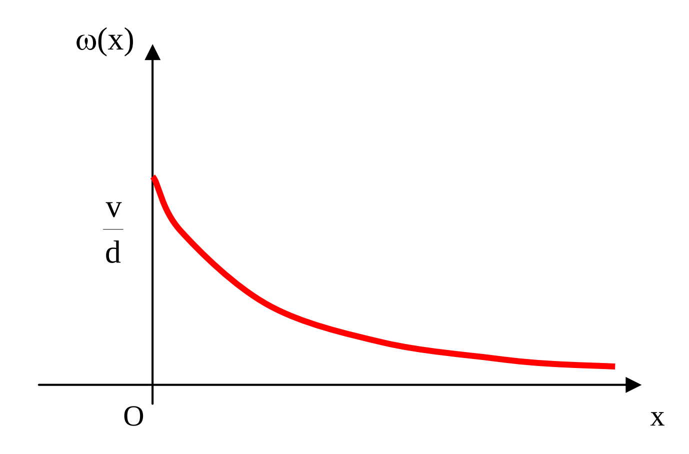
Teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dt} = v$ obtenemos finalmente:

$$\omega(x) = \frac{v.d}{d^2 + x^2} \quad (2)$$

Para bosquejar la función **ω** calculemos

$$\omega(o) = \frac{v}{d} \qquad \lim_{x \to +\infty} \omega(x) = 0$$

Es fácil deducir de (2) que la función **ω** es monótona decreciente ya que al aumentar **x** aumenta el denominador manteniéndose constante el numerador. El bosquejo gráfico será entonces como el indicado.



La gráfica nos confirma la impresión que habíamos obtenido en la parte i).

c) Recuerda que 1m/seg = 3.6 Km / h $\Rightarrow$ v = 72 Km / h = 20 m / seg

d = 100m .

Tendremos entonces en

$$\begin{cases} x = 0 & \omega(0) = \frac{v.d}{v^2} = \frac{v}{d} = \frac{20}{100} = 0.2 \ \frac{rad}{seg} \\ x = 50 & \omega(50) = \frac{v.d}{d^2 + x^2} = \frac{20.100}{100^2 + 50^2} \cong 1{,}6.10^{-2} \ \frac{rad}{seg} \end{cases}$$

d) Como x = v.t , sustituyendo en (1) obtienes:

$$\omega(t) = \frac{v.d}{d^2 + v^2.t^2} \qquad (3)$$

e) Derivando respecto de **t** la expresión anterior

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} = v.d.\left(- \frac{2v^2.t}{\left(d^2 + v^2.t^2\right)^2} \right)$$

$$\Longrightarrow \qquad \gamma = - \frac{2v^3.d.t}{\left(d^2 + v^2.t^2\right)^2}$$

Si : $x = 0 \Rightarrow \; t = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 0$

$x = 50 \Rightarrow \; t = 2.5$ seg $\Rightarrow \; \gamma = -\,2.56 \,.\, 10^{-2} \; \frac{rad}{seg^2}$

El signo de menos en la aceleración angular indica que la velocidad angular disminuye como puede deducirse de (3) observando que al aumentar **t** aumenta el denominador manteniéndose constante el numerador.

Ejercicio No. 11

a) Como la relación entre **q** y **p** es:

$$q^2 - 2.q.\sqrt{p} - p^2 - 31 = 0 \qquad (1)$$

si p = 9 U$S $\Longrightarrow$ $q^2 - 6.q - 112 = 0$

Resolviendo la ecuación obtenemos q = 14 unidades.

(La otra raíz q = - 8 no tiene significado práctico).

b) Como el precio **p** varía en el tiempo , **q** será consecuentemente función del tiempo.

Se te pide calcular la rapidez de variación de la demanda, o sea $\frac{dq}{dt}$ expresada

en $\frac{\text{miles de unidades}}{\text{semana}}$ cuando el precio es de 9 U$S.

La tasa de variación del precio por semana es constante e igual a 0.20 U$S. En consecuencia $\frac{dp}{dt} = 0.20\ \frac{U\$S}{\text{semana}}$.

Derivemos la relación (1) respecto del tiempo.

$$2q.\frac{dq}{dt} - 2\left[\frac{dq}{dt}.\sqrt{p} + q.\frac{1}{2.\sqrt{p}}.\frac{dp}{dt}\right] - 2.p.\frac{dp}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(2q - 2\sqrt{p}\right).\frac{dq}{dt} = \left(\frac{q}{\sqrt{p}} - 2p\right)\frac{dp}{dt}$$

Sustituyendo valores: $\left[(2).(14) - 2.\sqrt{9}\right]\frac{dq}{dt} = \left[\frac{14}{\sqrt{9}} - (4).(9)\right].0.20$

Finalmente, despejando obtienes : $\frac{dq}{dt} \cong 0.206\ \frac{\text{miles unidades}}{\text{semana}}$

Habrá entonces un incremento de 206 unidades demandadas .

Ejercicio No. 12

El volumen del tronco de cono al cual asimilamos la cantidad de madera que puede extraerse del árbol , es:

$$V = \frac{1}{3}\pi.h.\left(R^2 + R.r + r^2\right) \quad (1)$$

Deseamos calcular $\frac{dV}{dt}$, siendo h , R y r funciones del tiempo **t**.

Derivemos entonces la relación (1) que se cumple ∀ t ≥ 0.

Obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}.\left[\frac{dh}{dt}.\left(R^2 + r.R + r^2\right) + h.\left(2R.\frac{dR}{dt} + r.\frac{dR}{dt} + R.\frac{dr}{dt} + 2.r.\frac{dr}{dt}\right)\right]$$

Sustituyendo los valores dados: h=4 m =400 cm , R=90 cm , r= 60 cm ,

$\frac{dh}{dt} = 25\frac{cm}{año}$, $\frac{dR}{dt} = 15\frac{cm}{año}$, $\frac{dr}{dt} = 10\frac{cm}{año}$ resulta:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}.2,71 \cong 2,83\ \frac{m^3}{año}$$

Ejercicio No. 13

Como la concentración **C** es función de la población **p** y ésta es función del tiempo **t**, resulta ser **C** función compuesta de **t**.

Debes calcular la derivada de la concentración respecto del tiempo, para lo cual podemos previamente hallar la función compuesta y luego derivar.

Tendremos entonces:

$$C(t) = \sqrt{\frac{\left(3,1 + 0,1.t^2\right)}{2} + 17}\ .$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dC}{dt} = \frac{2.\left(3,1 + 01.t^2\right).0,2.t}{2.\sqrt{\frac{\left(3,1 + 0,1.t^2\right)^2}{2} + 17}}$$

Sustituyendo **t** por su valor 3 y operando resulta: $\frac{dC}{dt}(3) \cong 0,24 \quad \frac{\text{p.p.m.}}{\text{año}}$.

Puedes resolver este ejercicio sin necesidad de encontrar la función compuesta como hicimos líneas arriba.

Para ello basta partir de la relación $C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2}+17}$ (1) y tener en cuenta que $p(t)=3,1+ 0,1.\ t^2$ (2)

Derivando (1) y (2) respecto de **t** obtienes:

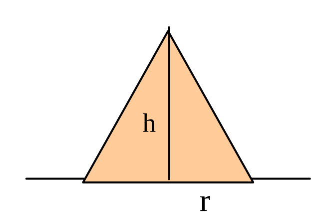
$$\frac{dC}{dt} = \frac{p}{2.\sqrt{\frac{p^2}{2}+17}}\frac{dp}{dt} \quad (3) \quad y \quad \frac{dp}{dt} = 0.2\,t$$

Para =3 : $p = 4$, $\frac{dp}{dt} = 0.6$.

Sustituyendo estos valores en (3) reencontramos $\frac{dC}{dt}(3) = 0.24 \quad \frac{\text{p.p.m}}{\text{año}}$.

Ejercicio No.14

El volumen del cono de arena es: $V = \pi.r^2.h$



Como r = h en todo instante, podemos concluir que

$$V= \pi.h^3 \quad \forall\ t \geq 0$$ siendo **h** función de **t** .

Se te pide calcular la velocidad de variación del volumen V, es decir el valor de $\frac{dV}{dt}$ cuando h = 1m .

Derivando la expresión del volumen respecto de **t** : $\frac{dV}{dt} = 3.\pi.h^2.\frac{dh}{dt}$

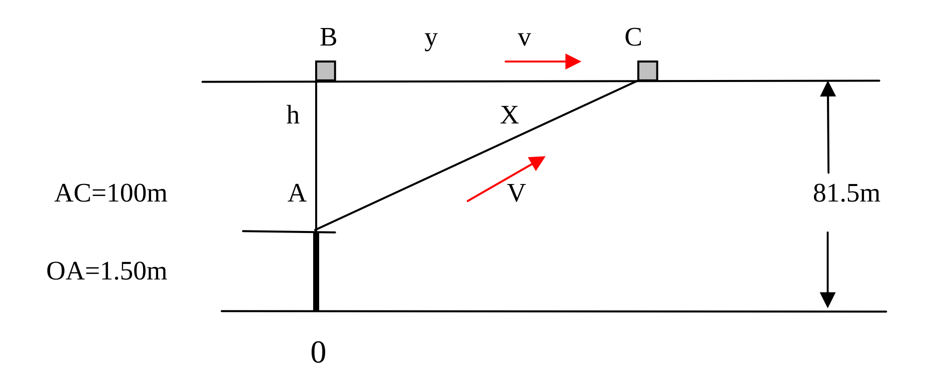
El enunciado indica como dato que para $h = 1m$, $\frac{dh}{dt} = 25\frac{cm}{min.} = 0.25\frac{m}{min.}$

Sustituyendo estos valores obtienes:

$$\frac{dV}{dt} = 3.\pi.(1)^2.0.25 = 0.75.\,\pi\ \frac{m^3}{min.}$$

El volumen está entonces aumentando a razón de 0.75.π metros cúbicos por minuto , cuando la altura es de 1m.

Ejercicio No. 15



A medida que la cometa se mueve horizontalmente su distancia **X** al niño varía con el tiempo , y la velocidad **V** a la que al niño va soltando hilo está dada por la derivada $\frac{dX}{dt}$. Como se te pide esa velocidad cuando la distancia es de 100m , deberás calcular $\frac{dX}{dt}(100)$.

Del triángulo ABC, aplicando el teorema de Pitágoras puedes escribir:

$X^2 = h^2 + y^2$ (1) donde **X** e **y** son funciones de **t** , y **h** es constante.

.Derivando (1) respecto de **t** se obtiene:

$$2.X.\frac{dX}{dt} = 2.y.\frac{dy}{dt}$$

$$\Longrightarrow \quad .\frac{dX}{dt} = \frac{y}{X}\frac{dy}{dt}$$

De (1), siendo X = 100 m , h = 81.5 – 1.5 = 80 m se concluye y= $\sqrt{100^2 - 80^2}$ = 60m

Como v=. $\frac{dy}{dt} = 20\frac{m}{min.}$ sustituyendo valores obtienes finalmente:

$$v = \frac{60}{100}.20 = 12\frac{m}{min.}$$

Ejercicio No. 16

a) La expresión de la temperatura en función del tiempo es:

$$T(t) = 25 - A.e^{-K.t}$$

Para t = 0 T = 10 ^{0}C $\Longrightarrow$ 10 = 25 – A $\Longrightarrow$ A = 15

t = 20 T = 15 ^{0}C $\Longrightarrow$ 15 = 25 – 15 $e^{-20\,K}$ $\Longrightarrow$ 15 $e^{-20\,K}$ = 10

Aplicando logaritmos despejas el valor de K: $-20K = L\frac{10}{15} \Rightarrow K \cong 0.02$

b) Para bosquejar la función calculamos:

T(0) = 10 $\lim_{t \to +\infty} (25 - e^{-0.02\,t}) = 25$ $\frac{dT}{dt} = 0.3.e^{-0.02t}$

Observa que $\frac{dT}{dt} = 0.3.e^{-0.02t}$ es ≥ 0 $\forall t$, por lo que la función es creciente en el intervalo.

Calculando la derivada segunda tendremos: $\dfrac{d^2T}{dt^2} = -6.10^{-3}e^{-0.02t} < 0 \quad \forall t \geq 0$

La función tiene entonces concavidad negativa.

El bosquejo gráfico será como el indicado en la figura.

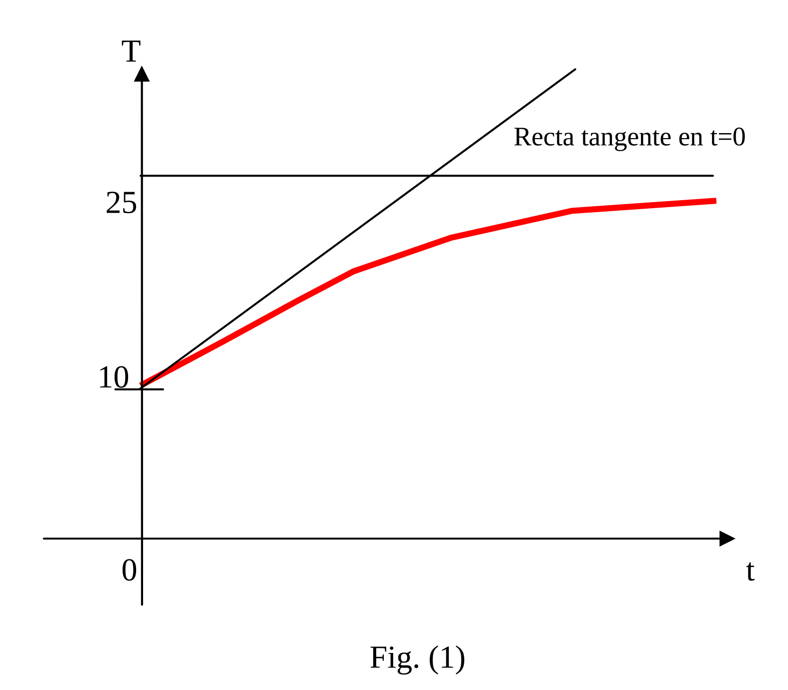


Fig. (1)

c) La rapidez de variación de la temperatura está dada por la función:

$$\frac{dT}{dt} = 0.3.e^{-0.02t} \qquad (1)$$

Esta función es claramente monótona decreciente en $[\ 0,+\infty)$, conclusión a la que puedes llegar analizando directamente la expresión anterior, derivándola y estudiando el signo de esta derivada o razonando sobre el bosquejo de la función **T** que tienes en la figura (1).

Si analizas la expresión (1) puedes observar que la exponencial tiene exponente negativo siendo por tanto factor decreciente del producto. El otro factor es la constante 0.3 y por consiguiente el producto decrece al aumentar **t**.

Puedes también derivar la función y obtendrás : $\frac{d^2T}{dt^2} = -6.10^{-3}e^{-0.02t} < 0 \quad \forall t \geq 0$

Por tanto concluyes que la función $\frac{dT}{dt}$ es monótona decreciente.

Finalmente llegas a la misma conclusión si razonas sobre la figura (1).

El valor de la función $\frac{dT}{dt}$ en un instante **t** está dado por la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente.

A medida que aumenta **t** esas tangentes se van "acostando" es decir disminuyendo su pendiente monótonamente.

La recta de pendiente máxima es entonces la tangente a la curva en el punto (0,10) que hemos representado en la figura (1).

La **máxima** rapidez de calentamiento de la bebida ocurre entonces en t = 0 y su valor es $\frac{dT}{dt}(0) \cong 0.3 \frac{{}^{o}C}{min.}$

Busquemos ahora el instante $\mathbf{t_0}$ en que la rapidez de calentamiento es la mitad de la máxima , o sea $0.15 \frac{{}^{o}C}{min.}$.

Tendremos entonces: $\frac{dT}{dt}(t_0) = 0.3.e^{-0.02\,t_0} = 0.15 \quad \Rightarrow \quad .e^{-0.02\,t_0} = 0.5$

Tomando logaritmos: $-0.02\,t_0 = L(\,0.5) \Rightarrow \; t_0 = \frac{-L0.5}{0.02} \cong 35 min.$

d) Al cabo de 1 hora tendremos: t= 60 min

$T(60) =. 25 - 15.e^{-(0.02).60} \cong 20\,^{0}C$

La bebida demora entonces aproximadamente 1 hora para aumentar su temperatura de 10 a 20 grados centígrados.

Ejercició No. 17

$$Q(t) = \frac{-A}{\omega}.\cos(\omega.t)$$

a) Se trata de una simple función sinusoidal que bosquejaremos en un período T.

Recuerda que el período de la función **cos (ωt)** en el tiempo es $p = \frac{2\pi}{\omega}$.

Estudiaremos la función en un período T . Elegimos $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$.

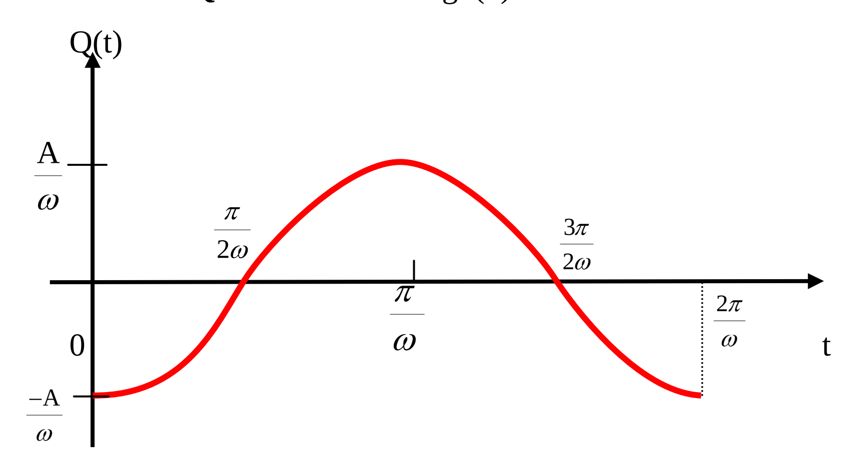
La función se anula para:

$$\begin{cases} \omega.t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2.\omega} \\ \omega.t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2.\omega} \end{cases}$$

Los valores máximos y mínimos se producen para :

$$\begin{cases} \omega t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow Q(0) = -\frac{A}{\omega} \quad \text{Mínimo} \\ \omega t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow Q(\frac{\pi}{\omega}) = \frac{A}{\omega} \quad \text{Máximo} \\ \omega t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow Q(\frac{2\pi}{\omega}) = -\frac{A}{\omega} \quad \text{Mínimo} \end{cases}$$

La gráfica de la función **Q** se indica en la fig. (1).



b) La intensidad **I** de la corriente se define como: $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ y es el índice matemático que indica la rapidez de variación de la carga **Q** que atraviesa la sección del conductor.

Estudiando las pendientes de las rectas tangentes al gráfico de la fig.(1) deducimos:

En $t = 0$, $t = \frac{\pi}{\omega}$, $t = \frac{2\pi}{\omega}$ pendiente nula

En $[\ 0, \frac{2\pi}{\omega}\ ]$ pendiente positiva creciente.

En $[\ \frac{2\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\ ]$ pendiente positiva decreciente.

En $[\ \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}\ ]$ pendiente negativa decreciente.

En $[\ \frac{3\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{\omega}\ ]$ pendiente negativa creciente.

Concluímos que la pendiente **máxima** ocurre para $t = \frac{\pi}{2\omega}$ la pendiente **mínima** para $t = \frac{3\pi}{2\omega}$.

c) Calculemos $I = \frac{dQ}{dt}$

$$I(t) = -\frac{A}{\omega}.[-\omega.\text{sen}(\omega.t)] = A.\text{sen}(\omega.t)$$

El gráfico de la función **I** es obviamente el indicado en fig.(2).

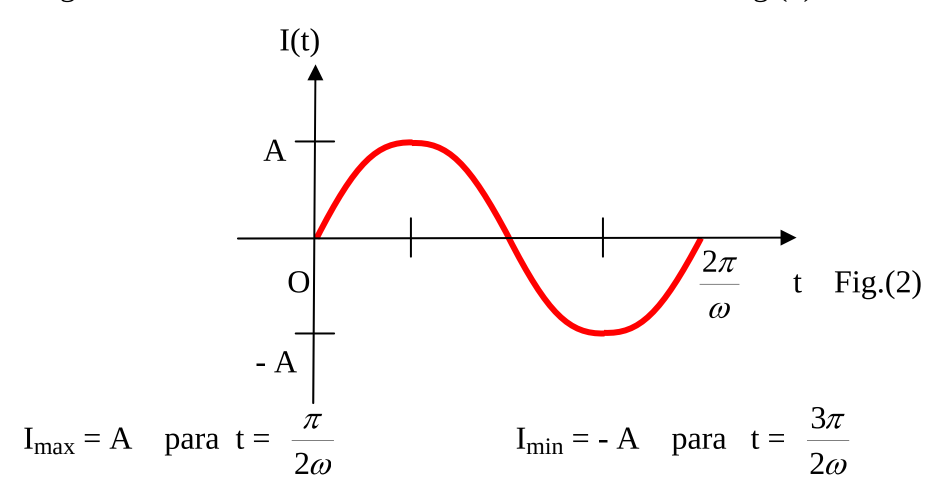


Fig.(2)

$I_{max} = A$ para $t = \frac{\pi}{2\omega}$ $\qquad$ $I_{min} = -A$ para $t = \frac{3\pi}{2\omega}$

Con lo que verificamos la parte anterior.

d) Como $I_{max} = A$ debemos hallar (t_0) para que $|I(t_0)| = \frac{A}{2}$

$$|I(t_0)| = |\ A.\text{sen}(\omega t_0)\ | \Rightarrow |A \text{ sen } (\omega t_0)| = \frac{A}{2} \Rightarrow \text{sen } (\omega t_0) = \pm \frac{1}{2}$$

De la última igualdad concluímos que $\omega.t_0 = \text{Arcsen}(\pm ½)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \omega.t_0 = \dfrac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \omega.t_0 = \dfrac{5\pi}{6} \\ \omega.t_0 = \dfrac{11\pi}{6} \quad \text{y} \quad \omega.t_0 = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$$

Finalmente: $t_0 = \dfrac{\pi}{6\omega}$ $\quad t_0 = \dfrac{5\pi}{6\omega}$ $\quad t_0 = \dfrac{11\pi}{6\omega}$ $\quad t_0 = \dfrac{7\pi}{6\omega}$

Ejercicio No. 18

Siendo: **n** número de vacunos infectados, **N** número total de vacunos del rodeo nacional , **A** y **K** constantes , A>1 , k>0 se cumple:

$$n(t) = \frac{N}{1 + A.e^{-K.t}} \quad (1)$$

a) La velocidad **v** de propagación de la enfermedad es: $v = \dfrac{dn}{dt}$.

Derivando: $$v(t) = \frac{NAK\,e^{-Kt}}{\left(1 + A.e^{-K.t}\right)^2} \quad (2)$$

Debemos probar ahora que esta función **v** tiene un máximo en el intervalo [0,∞].

Calculemos: $v(0) = \dfrac{NAK}{(1+A)^2} > 0$ $\qquad \lim_{t \to +\infty} v(t) = 0$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2n}{dt^2} = NAK.\frac{-K.e^{-K.t}\left(1 + A.e^{-K.t}\right)^2 - e^{-K.t}\left[2\left(1 + Ae^{-K.t}\right)\left(-A.K.e^{-K.t}\right)\right]}{\left(1 + A.e^{-K.t}\right)^4}$$

Operando: $$\frac{dv}{dt} = \frac{NAK^2.e^{-K.t}\left[-\left(1 + A.e^{-K.t}\right) + 2.A.e^{-K.t}\right]}{\left(1 + A.e^{-K.t}\right)^3}$$

Finalmente: $$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2n}{dt^2} = \frac{NAK^2.e^{-K.t}\left[-1 + .A.e^{-K.t}\right]}{\left(1 + A.e^{-K.t}\right)^3} \quad (3)$$

Anulando la expresión (3)

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow -1 + A.e^{-K.t} = 0 \Longrightarrow -K.t = L(1/A) = -L(A)$$

$$\Longrightarrow t = \frac{L(A)}{K}$$

Hemos encontrado un punto crítico en $t=\frac{L(A)}{K}$.Debemos clasificarlo para lo cual estudiamos el signo de la función derivada.

Analizando la expresión (3) puedes deducir que:

$$\text{Sig. } \frac{dv}{dt} \equiv \text{Sig. } -1+A.e^{-K.t}$$

0 + — ; 0 L(A) / K fig. (1)

El punto crítico es entonces un **máximo**.

Busquemos el número de animales afectados en ese instante, es decir $n\left(\frac{L(A)}{K}\right)$.

$$n\left(\frac{L(A)}{K}\right)=\frac{N}{1+A.e^{-K.\frac{LA}{K}}}=\frac{N}{1+A.e^{-LA}}=\frac{N}{1+A.(\frac{1}{A})}=\frac{N}{2}$$

Hemos encontrado entonces que el momento de máxima velocidad de propagación de la enfermedad es aquél en que se infecta la mitad del rodeo.

b) Para bosquejar n (t) calculemos: $n(0)=\frac{N}{1+A}$ $\lim_{t \to +\infty} n(t) = N$

La derivada de la función es: $$\frac{dn}{dt}=\frac{NAK\, e^{-Kt}}{\left(1+A.e^{-K.t}\right)^2}$$

Su simple observación te permite concluir que es positiva para todo valor de **t**, por lo que la función **n** será **creciente.**

La derivada segunda de la función **n** es como ya hemos visto $\frac{dv}{dt}$ cuyo signo lo da la fig.(1). El punto crítico hallado en la parte anterior es entonces punto de inflexión de la función **n** , siendo la concavidad de la función positiva en el intervalo $[0, \frac{L(A)}{K}]$ y negativa $\forall\, t \geq \frac{L(A)}{K}$. La fig. (2) muestra el gráfico de la función **n**.

c) En las partes **a)** y **b)** del ejercicio tenemos todos los elementos necesarios para graficar la función **v** en el intervalo [0,+∞]. En efecto disponemos del valor en t = 0 , del límite para **t** tendiendo a +∞ , y de las expresiones de la derivada primera y segunda así como de su estudio de signos.

La fig. (3) muestra el gráfico de la función **v**.

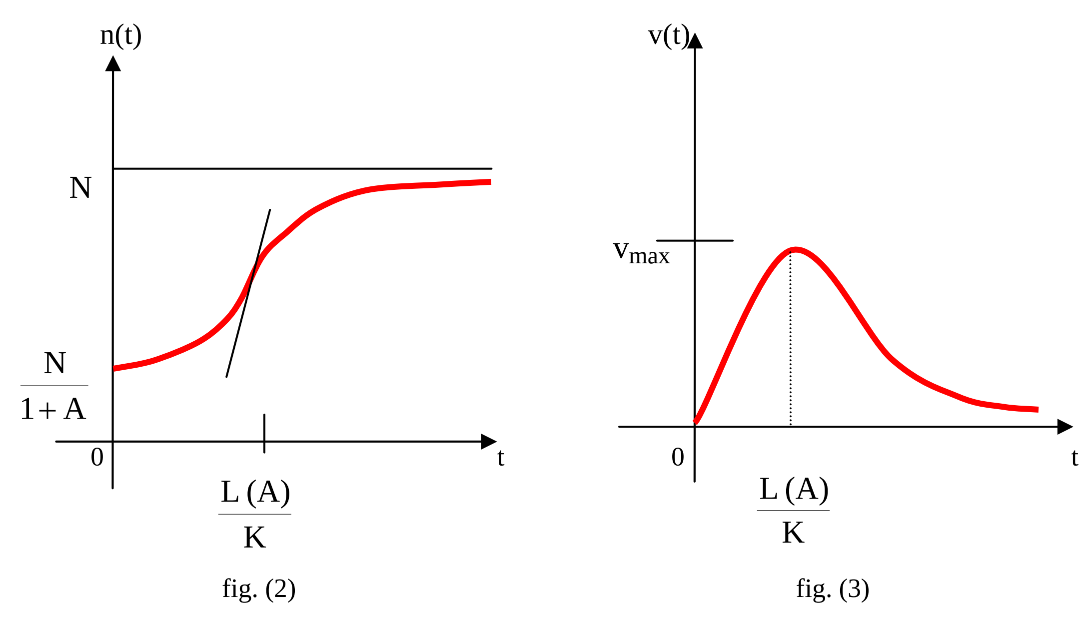


fig. (2) fig. (3)

Ejercicio No.19

$$N(t) = P\,(1 - e^{-K.t}) \quad (1)$$

a) Deseamos saber cuánto tiempo transcurrirá para que el 60% de la población conozca el rumor, es decir cual es el valor de **t** para que N = 0.6 P.

Sustituyendo en (1) y teniendo en cuenta que K= 0.1, despejando **t** obtienes:

$$0.6.P = P\,(1 - e^{-0.1..t}) \Longrightarrow e^{-0.1..t} = 0.4 \Longrightarrow t = \frac{-L(0.4)}{0.1}$$

Finalmente : t = 9.16 años

La velocidad de propagación del rumor es $\frac{dN}{dt}$.

Derivando (1) : $\frac{dN}{dt} = P.K.\,e^{-K.t} \Longrightarrow \frac{dN}{dt}(9.16) = 0.1.P.\,e^{-0.1.(9,16)} \cong 0.04.P\,\frac{hab}{año}$

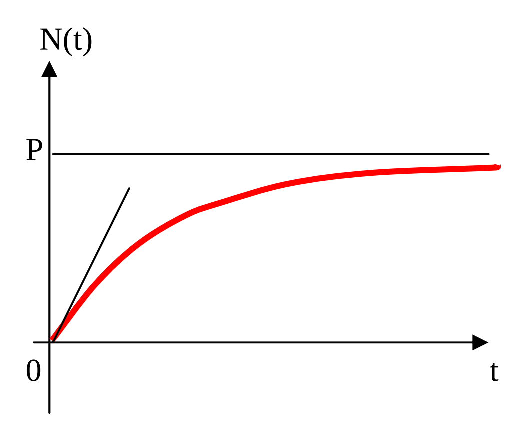
b) Para graficar N(t) en el intervalo [0,+∞] calculamos:

$N(0)=0 \qquad \lim N(t) = P \qquad \frac{dN}{dt} = P.K.\,e^{-K.t} \qquad sg.\ \frac{dN}{dt}$: + (0 ↗)

La derivada segunda es: $\frac{d^2N}{dt^2} = -\,0.01.Pe^{-0.1.t}$

La sola inspección de su expresión te permite afirmar que la derivada segunda es negativa para todo valor de **t** , por lo que la función tendrá concavidad negativa.

La figura (1) muestra el andamiento de la función.



De la gráfica puedes deducir que la máxima pendiente de las tangentes a la curva corresponde a la tangente en $t = 0$.

Esto puedes justificarlo matemáticamente teniendo en cuenta que la función es $\frac{dN}{dt}$ es monótona decreciente en el intervalo $[0,+\infty]$ por ser negativa en él.

En consecuencia: $\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \frac{dN}{dt}(0) = 0.1.P \; \frac{hab.}{año}$

c) Sabemos que $\frac{dN}{dt} = P.K.\,e^{-K.t}$ (2)

El número de habitantes que al cabo de un tiempo **t** ha oído el rumor es N(t), por lo que el número de los que **no lo ha oído** es P – N.

Sustituyendo N por su expresión (1) tenemos:

$$P - N = P - P(1 - e^{-K.t}) = P.\,e^{-K.t}$$

Sustituyendo en la expresión (2) :

$$\frac{dN}{dt} = K.(P - N)$$

lo que nos indica que la velocidad de propagación del rumor es proporcional al número de personas que en el instante considerado **no** ha oído el rumor , siendo K la constante de proporcionalidad .

Ejercicio No.20

La población de bacterias varía con el tiempo según la expresión:

$P(t) = C.e^{K.t}$ C y K constantes, **t** en horas, K en 1 / hora.

a) Como para : $\begin{cases} t = 0 \text{ , } P = 1000 \Rightarrow C = 100 \\ t = 1, P = 2000 \Rightarrow 2000 = 1000\, e^{K} \Rightarrow K = L\,2 \end{cases}$

b) Sustituyendo los valores hallados:

$$P(t) = 1000.e^{(L2).t}$$

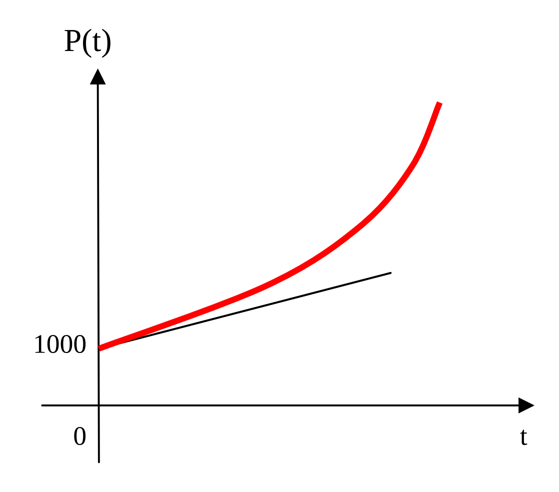
Para bosquejar la función calculamos:

$$P(0) = 1000 \qquad \lim_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$$

$$\frac{dP}{dt} = 1000.L2.e^{(L2).t} > 0 \qquad \forall\, t \geq 0 \Rightarrow P(t) \text{ monótona creciente.}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 1000.(L2)^2.e^{(L2).t} > 0 \quad \forall\, t \geq 0 \Rightarrow P(t) \text{ tiene concavidad positiva.}$$

El gráfico de **P** es como el indicado en la figura . Repara que se trata de una simple función exponencial.



De la inspección del gráfico o de la expresión de la derivada primera puedes concluir que la **mínima** velocidad de crecimiento de la colonia ocurre en t = 0 y vale: $v_{min.} = 1000.\ L2 \cong 690 \dfrac{\text{bacterias}}{\text{hora}}$

c) Para t =2 , P(2) = 4000 bacterias $\dfrac{dP}{dt}(2) = 2760 \dfrac{\text{bact.}}{\text{h}}$.

d) Como $P(t) = C.e^{K.t}$ y $\frac{dP}{dt} = CK.e^{K.t}$ concluímos que

$$\frac{dP}{dt} = K.P(t)$$

Es decir que la velocidad de crecimiento de la colonia de bacterias es proporcional a la cantidad de ellas en cada instante, siendo K la constante de proporcionalidad.

Ejercicio No. 21

(1) $P(t) = 5.\, e^{\,0.0278.t}$ P en miles de millones , **t** en años.

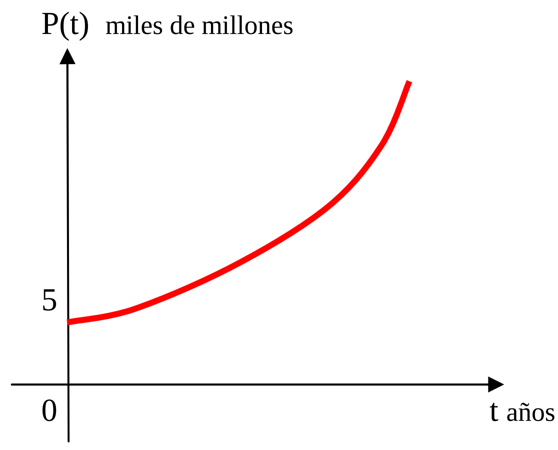
a) Se trata de una simple función exponencial para la cual:

$$P(0) = 5 \qquad \lim_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$$

(2) $$\frac{dP}{dt} = 5.(0.0278).e^{0.0278.t} = 0.139.e^{0.0278} > 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0.00361.e^{0.0278.t} > 0 \quad \forall t \geq 0$$

El bosquejo gráfico es como el indicado en la figura.



b) Tomando t = 0 en el año 1987, la tasa de variación instantánea de población fue:

$$\frac{dP}{dt}(0) = 0.139 \ \frac{\text{miles de millones}}{\text{año}} = 139 \ \frac{\text{millones}}{\text{año}}$$

c) El año 2005 corresponde a t = 18 ; por lo que tendremos

$$P(18) = 5.e^{0.0278.(18)} \cong 8.247 \text{ miles de millones } = 8247 \text{ millones.}$$

La tasa instantánea de variación de la población será:

$$\frac{dP}{dt}(18) \cong 0.139.e^{0.0278.(18)} \cong 229 \ \frac{\text{millones}}{\text{año}}$$

d) Población en l987: P(0) = 5000 millones . La población se duplicará, es decir, será de 10.000 millones en un tiempo $\mathbf{t_0}$ tal que:

$$10 = 5.e^{0.0278.t_0}$$

Despejando: $t_0 = \dfrac{L2}{0.0278} \cong 25$ años

La duplicación ocurriría entonces en el año 2012.

La población alcanzaría los 15.000 millones en un tiempo $\mathbf{t_1}$ tal que:

$$15 = 5.e^{0.0278.t_1}$$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{L3}{0.0278} \cong 39.5$ años que corresponde al año 2027 aproximadamente.

e) A finales del año 2002 la población mundial fue del orden de 6000 millones.

De acuerdo a este modelo, como el 2002 corresponde a t = 16 lo que daría para la población un valor de $P(16) \cong 7800$ millones.

Estos valores permiten afirmar que el modelo no es suficientemente ajustado a la realidad debiéndose corregir mediante la introducción de parámetros que tengan en cuenta factores que no fueron ponderados en él.

f) De las expresiones (1) y (2) del comienzo del ejercicio deduces fácilmente que

$$\frac{dP}{dt} = 0.0278.\, P(t)$$

La velocidad de crecimiento fue tomada entonces como proporcional a la población P en este modelo, siendo 0.0278 la constante de proporcionalidad.

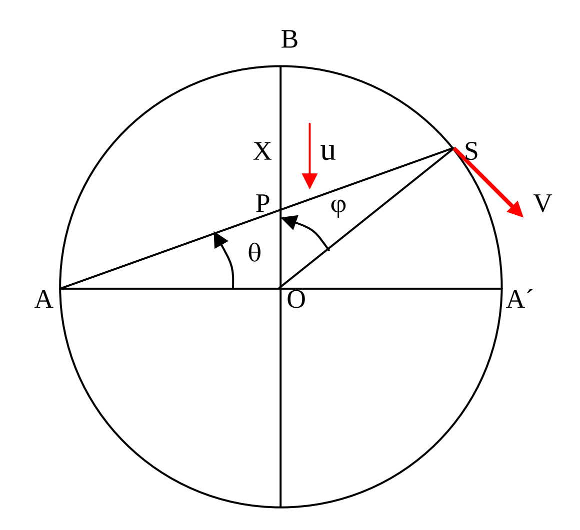
Ejercicio No. 22

a) Refiriéndonos a la fig.(1) tenemos que en el triángulo BOD se cumple:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \widehat{SOD}$$

(el ángulo SOD es externo al triángulo AOS y vale por tanto 2θ)

$$\Rightarrow \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$



El problema presenta simetría respecto del diámetro AA´ por lo que nos limitaremos a efectuar el estudio para $0 \leq x \leq R$.

En el triángulo AOP : $\operatorname{tg}\theta = \frac{OP}{OA} = \frac{R-x}{R} \quad \Rightarrow \theta = \operatorname{Arctg}\left(\frac{R-x}{R}\right)$ (1)

b) Como: $s = R.\varphi$ y $V = \frac{ds}{dt}$ tendremos:

$s = R\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$ (2) con $s = s(t)$ y $\theta = \theta(t)$.

Derivando la expresión (2) respecto de **t** obtienes:

$$\frac{ds}{dt} = -2R\frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

Para hallar la expresión de $\frac{d\theta}{dt}$ derivamos la igualdad (1) respecto de **t** recordando la derivada de la función Arctg y teniendo en cuenta que **x** es función de **t**.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{R}}{1+\left(\frac{R-x}{R}\right)^2}\frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo en (3) y teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dt} = v$ se obtiene :

$$V = \frac{ds}{dt} = -2R.\frac{\frac{-1}{R}.v}{1+\left(\frac{R-x}{R}\right)^2} = \frac{2.v}{1+\left(\frac{R-x}{R}\right)^2}$$

Operando , finalmente : $$V(x) = \frac{2.v.R^2}{R^2 + (R-x)^2}$$

c) Bosquejemos V(x) en [0 , 2R]

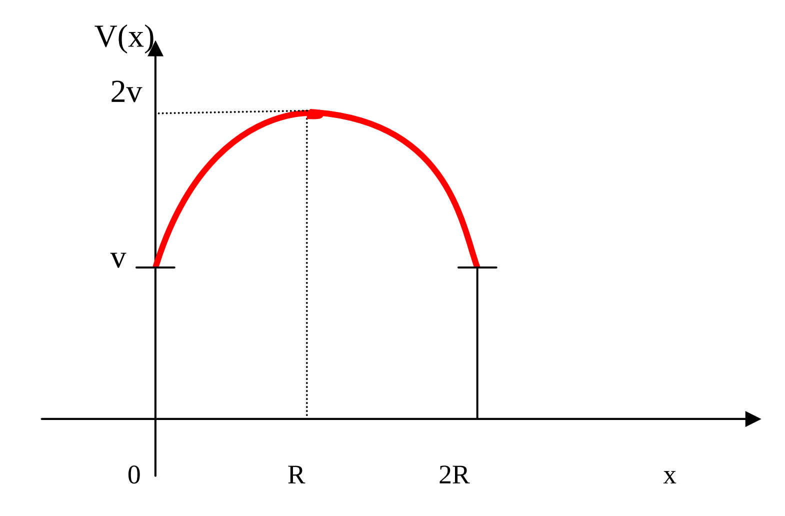
$$V(0) = v \qquad V(2R) = v$$

Derivando: $$\frac{dV}{dt} = 2.v.R^2 . \frac{-2(R-X).(-1)}{\left[R^2 + (R-x)^2\right]^2} = \frac{4.v.R^2.(R-x)}{\left[R^2 + (R-X)^2\right]^2}$$

Sig. $\frac{dV}{dx}$: 0 (+) R (—) 2R ; en R: 0, Max.

El máximo relativo tiene como ordenada: V(R) = 2 v por lo que resulta ser el **máximo** absoluto en el intervalo.

La gráfica de la función tendrá el andamiento indicado en la figura.



La velocidad de la sombra es entonces **máxima** cuando el móvil pasa por el punto O y **mínima** en los puntos B y C.

d) En el punto medio de BO es $x = \frac{R}{2} \implies V\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{8}{5} v$

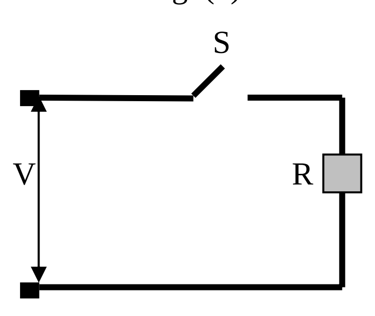
Como $V_{max} = 2$ v $\implies \frac{V(\frac{R}{2})}{V_{max}}.100 = 0.8.(100) = 80\%$

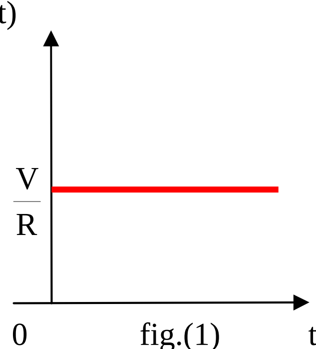
En consecuencia la sombra S alcanza el 80% de la velocidad máxima cuando el móvil pasa por el punto medio del segmento OB.

Ejercicio No.23

a) La intensidad de corriente está dada por $I(t) = \frac{V}{R}$

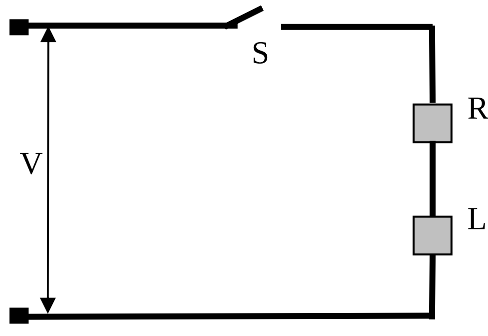
Como V y R son constantes , entonces $I(t) = K$ con K cte. La gráfica de la función **I** es la indicada en la fig. (1).





b) La intensidad de corriente está dada ahora por: $I(t) = \frac{V}{R}.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

siendo $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de tiempo del circuito.



Para bosquejar **I** calculamos:

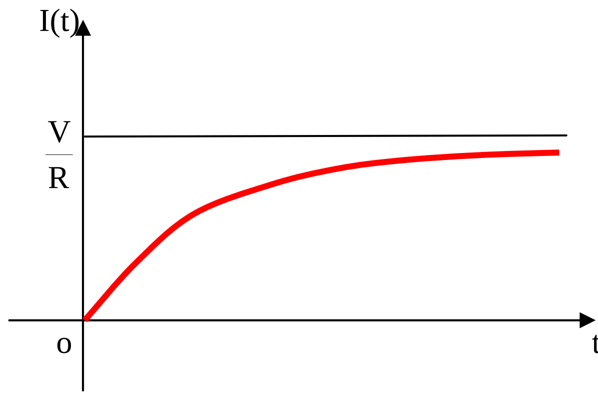
$$I(0) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} I(t) = \frac{V}{R}$$

Derivando $\frac{dI}{dt} = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{2}.e^{\frac{-t}{\ }}\right) = \frac{V}{L}.e^{-\frac{t}{\tau}} < 0 \qquad \forall\, t \geq 0 \qquad (1)$

La función **I** es entonces monótona creciente con asíntota horizontal $y = \frac{V}{R}$.

La derivada segunda es: $\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{V}{L\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} < 0 \quad \forall\, t \geq 0$

La función tiene entonces concavidad negativa y su bosquejo gráfico es el indicado en la figura (2).



c) En el caso a) al cerrar la llave S la corriente **I** alcanza instantáneamente el valor final $\frac{V}{R}$.

En el caso b) la corriente **I** tiende asintóticamente al valor final $\frac{V}{R}$.

El efecto de la bobina **L** ha sido enlentecer el aumento de la corriente **I** desde el valor cero al valor final.

d) La rapidez de variación de **I** está dado por su derivada $\frac{dI}{dt}$ por lo que en:

i) $t = 0$, $\frac{dI}{dt}(0) = \frac{V}{L}$ **ii)** $t = \tau$, $\frac{dI}{dt}(\tau) = \frac{V}{L}.e^{-1} = \frac{1}{e}.\frac{V}{L}$

La máxima rapidez de variación de la corriente, medida en $\frac{\text{Amp.}}{\text{seg}}$ **,** ocurre en t =0 como puedes deducir del bosquejo de **I** de la fig.(2), o también del hecho de que la derivada primera de la función $\frac{dI}{dt}$**,** o sea , $\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{V}{L\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} < 0 \quad \forall\, t \geq 0$ nos indica que la función es monótona decreciente y su valor máximo se produce entonces en el extremo izquierdo del intervalo.

e) Para $t = \tau$ tenemos:

$I(\tau) = \frac{V}{R}(1 - e^{-1}) \cong 0.63\,\frac{V}{R}$. Como el valor final al cual tiende la corriente es $\frac{V}{R}$,

$\Longrightarrow$ $I(\tau) = 0.63\, I_{final} = 63\,\%\ I_{final}$

La constante de tiempo del circuito es entonces: “**el tiempo que demora la corriente para que su intensidad I alcance el 63% de su valor final”**

Como se te pide que el valor final no cambie no podrás variar el valor de R , por lo que tendrás que actuar sobre la bobina .

La expresión de la intensidad de corriente era:

$$I(t) = \frac{V}{R}.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (1)$$

Analicemos , en un instante cualquiera **t** , como varía la intensidad **I** al variar la cte. de tiempo **τ** .

Consideremos dos valores de τ , τ_1 y τ_2 con $\tau_1 < \tau_2$ y sean I_1 e I_2 las respectivas intensidades .

Se cumplirá que:

$$\frac{t}{\tau_1} > \frac{t}{\tau_2} \Rightarrow -\frac{t}{\tau_1} < -\frac{t}{\tau_2} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau_1}} < e^{-\frac{t}{\tau_2}} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} > 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \Rightarrow I_1 > I_2$$

En conclusión: “a menor constante de tiempo , mayor intensidad de corriente” lo que implica mayor velocidad de crecimiento.

Como $\tau = \frac{L}{R}$ debes entonces **disminuir** la autoinducción L de la bobina.

Podrías llegar a la misma conclusión considerando la función $I(\tau)$ y mostrar que es una función monótona decreciente.

Derivando la expresión (1) tomando **V**, **R** , y **t** como constantes tendrás:

$$\frac{dI}{d\tau} = -\frac{V}{R.}.\left(\frac{t}{\tau^2}\right).e^{-\frac{t}{\tau}} < 0 \quad \forall\, t \geq 0$$

Efectivamente entonces la función intensidad es monótona decreciente respecto de τ .

Ejercicio No. 24)

a) $$I(t) = \frac{V}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

τ = R.C (cte. de tiempo)

Calculamos: $I(0) = \frac{V}{R}$ $\qquad \lim_{t \to +\infty} I(t) = 0$

Derivando: $\frac{dI}{dt} = -\frac{V}{R.\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} < 0 \quad \forall\, t \geq 0$

La función es entonces monótona decreciente.

Su derivada segunda será: $\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{V}{R.\tau^2}.e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \quad \forall\, t \geq 0$

La función tiene entonces concavidad positiva para todo **t**. La fig. (1) indica el andamiento de la función.

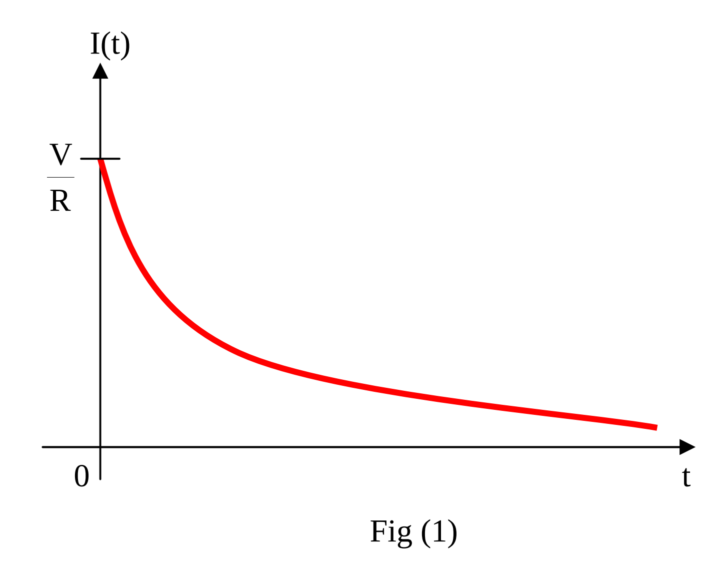


Fig (1)

b) El valor **máximo** de la intensidad I es: $I_{max} = \frac{V}{R}$ y corresponde al instante inicial t = 0.

c) La rapidez de variación de la intensidad está dada por : $\frac{dI}{dt} = -\frac{V}{R.\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

En $t = 0$: $\qquad \dfrac{dI}{dt}(0) = -\dfrac{V}{R.\tau} \qquad Amp/seg$

En $t = \tau$: $\qquad \dfrac{dI}{dt}(\tau) = -\dfrac{V}{R.\tau}.e^{-1} \qquad Amp/seg$

d) Para $t = \tau$: $\qquad I(\tau) = \dfrac{V}{R}.e^{-1} \cong 0.37 . I_{max}$

$\Longrightarrow \qquad I(\tau) \cong 37\% \ I_{max}$

I(t)
V/R
I (τ)
0 τ t

Fig. (2)

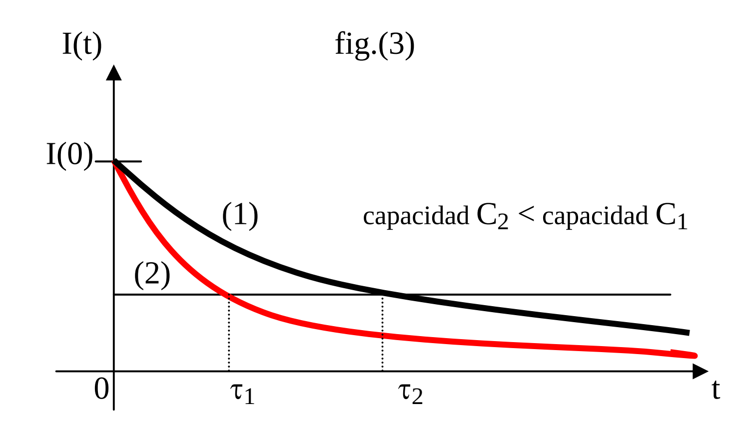
La constante de tiempo en este circuito indica el tiempo que demora la corriente en disminuir hasta el 37% de su valor inicial.

e) Como se te indica que el valor inicial del voltaje V del condensador no cambia y se exige que la intensidad inicial V/R sea la misma , no podrás modificar el valor de la resistencia R.

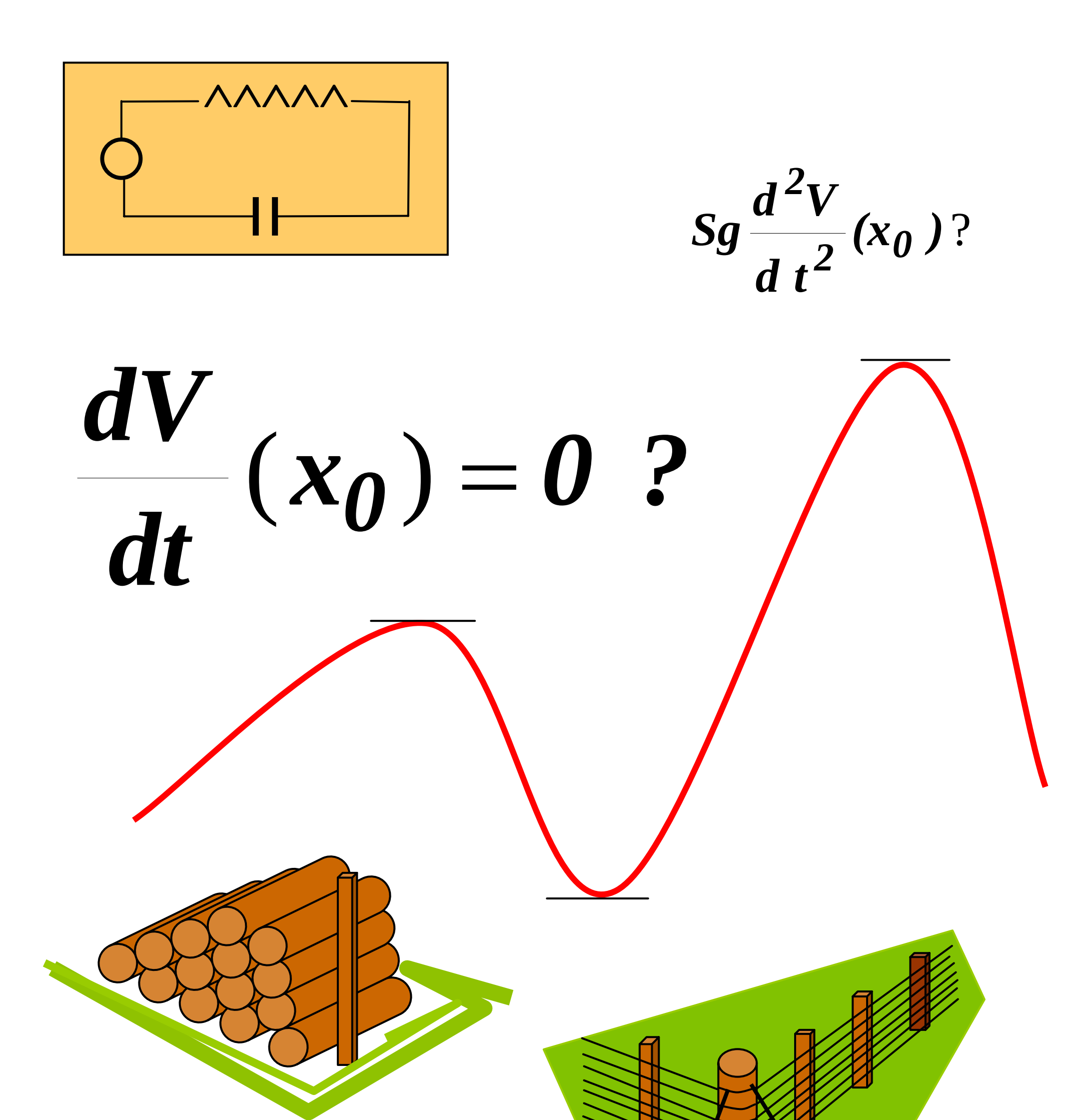
La única posibilidad de variar la cte. de tiempo $\tau = R.C$ es variar entonces la capacidad C.

Para que la intensidad I disminuya más rápidamente debes disminuir la cte. de tiempo para lo cual debes disminuir la capacidad C.

Las curvas (1) y (2) de la fig. (3) te muestran lo afirmado anteriormente.



CAPITULO 2



INTRODUCCION

Capítulo 2

INTRODUCCION

En este capítulo te proponemos ejercicios sobre una aplicación muy importante y común del concepto de derivada en distintas disciplinas , la optimización de funciones.

A una empresa de transporte seguramente le interesa que el costo por kilómetro de sus viajes sea el menor posible , a un fabricante de determinado artículo le interesará que el costo de fabricación por unidad sea el más bajo posible , en Electrotecnia , por ejemplo , interesará cómo diseñar determinado dispositivo para que su consumo de energía sea mínimo , a una empresa de construcción cómo dimensionar un silo para grano para que el costo de la construcción sea el más bajo posible , un vendedor se interesa en cuál debe ser el precio de venta de su producto para obtener el mayor beneficio posible.

En fin , son innumerables los problemas de estos tipos que se dan en la realidad.

Estos problemas llamados de **optimización** , desde el punto de vista matemático se reducen a problemas de determinación de **máximos y mínimos absolutos** de funciones de una variable real en determinados intervalos , problemas cuya resolución conoces del curso teórico.

Para resolver estos ejercicios deberás entonces extremar una función.

Tu primer paso será individualizar con claridad **cual es la función** a la que debes hallarle el máximo y / o mínimo absoluto.

En ocasiones el enunciado del ejercicio te proporciona la expresión analítica de esa función.

En otros , en cambio , tú deberás conseguir esa expresión analítica utilizando los datos dados en el enunciado .

Es común que al principio elijas más de una variable en el problema.

Si ello ocurre no debes perder de vista que se trata de problemas de funciones de **una** variable , por lo que existirán relaciones entre esas variables que has elegido que te permitirán finalmente reducir el problema a una única variable.

Una vez que has logrado la expresión analítica de la función buscada deberás establecer el intervalo de variación de la variable elegida.

Llegado este momento estarás en condiciones de aplicar tus conocimientos matemáticos para resolver el problema de máximo y / o mínimo que tienes planteado.

Ten presente que todas las funciones con las que trabajarás en los ejercicios son funciones **contínuas** en los intervalos de estudio que determinarás.

Recordemos algunos de estos conocimientos.

Definición de extremos absolutos.

1) $f(x_0)$ es máximo absoluto de f $\Leftrightarrow$ $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall\ x \in D(f)$

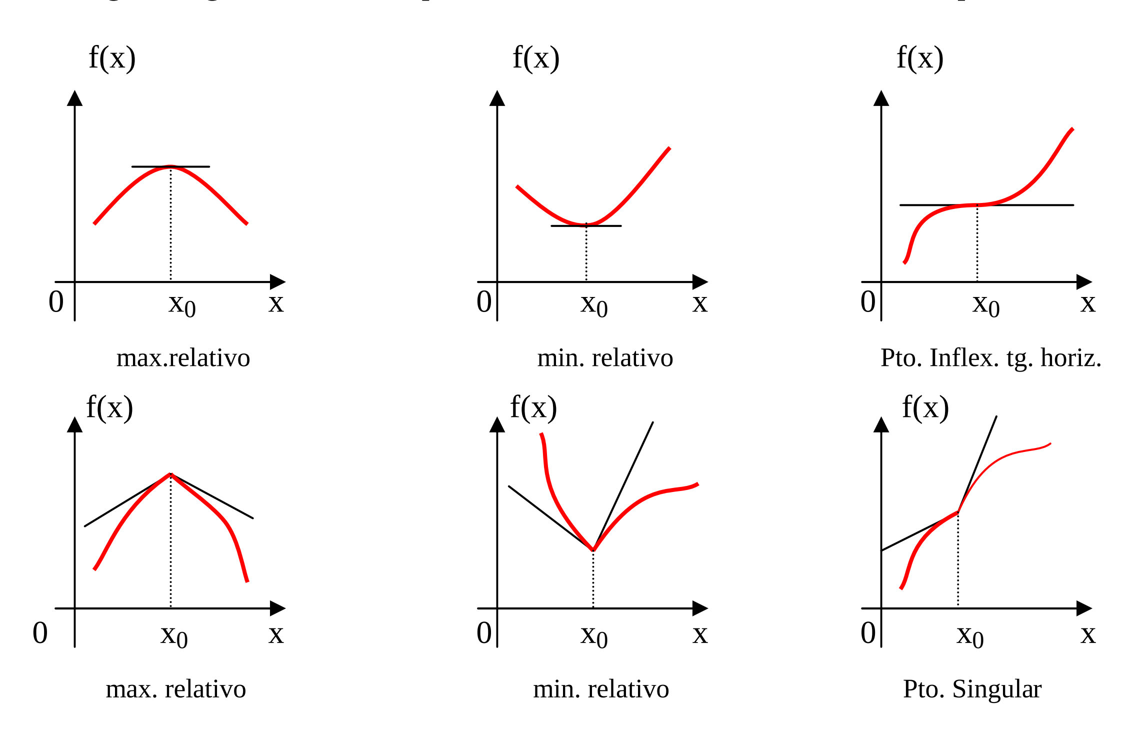
2) $f(x_0)$ es mínimo absoluto de f $\Leftrightarrow$ $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall\ x \in D(f)$

Definición de punto crítico.

$$\mathbf{x_0} \text{ es punto crítico de la función f si } \begin{cases} \dfrac{df}{dx}(x_0) = 0 \\ \\ \dfrac{df}{dx}(x_0) \ \nexists \end{cases}$$

Un punto crítico de una función es entonces un punto del dominio donde siendo contínua la función , su derivada en nula o no existe (punto singular).

Las figuras siguientes indican posibles andamientos de la función en un punto crítico.



En consecuencia si :

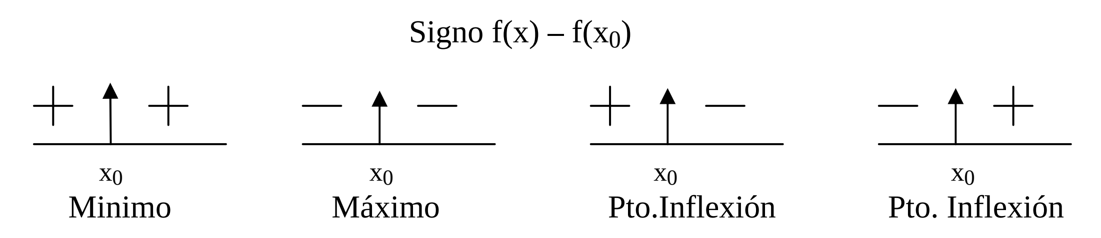
a) $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ el punto $\mathbf{x_0}$ puede ser máximo relativo , mínimo relativo o punto de inflexión de tangente horizontal (recuerda que derivada nula implica tangente horizontal) .

b) $\frac{df}{dx}(x_0) \nexists$ el punto $\mathbf{x_0}$ puede ser máximo relativo , mínimo relativo o no ser extremo relativo .

Para decidir cual es la situación que se presenta se hace necesario clasificar el punto crítico.

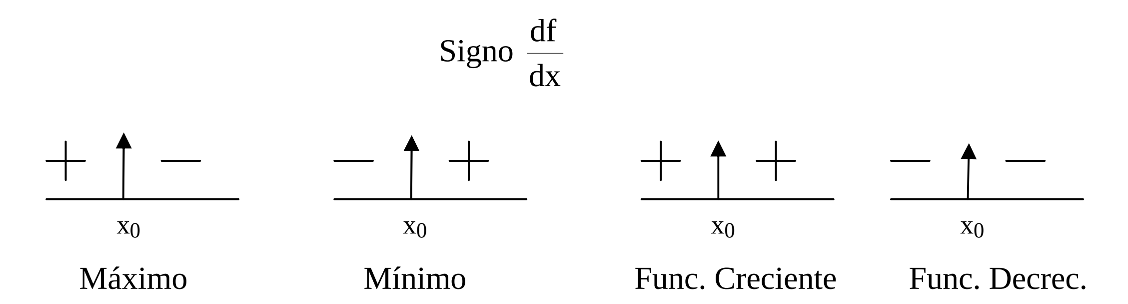
Criterios de clasificación de un punto crítico.

1) puedes valerte de la definición de extremo relativo y estudiar el signo de la diferencia **f(x) – f($\mathbf{x_0}$)** en un entorno de x_0 .



2) Criterio de la derivada 1ra.

Puedes estudiar el signo de la derivada en un entorno de x_0 .



3) Criterio de la derivada 2da.

Si la derivada 2da. de la función en el punto $\mathbf{x_0}$ existe y es distinta de cero puedes valerte de su valor para la clasificación.

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) \begin{cases} \text{Positivo} \Longrightarrow \text{Mínimo relativo} \\ \\ \text{Negativo} \Longrightarrow \text{Máximo relativo} \end{cases}$$

Máximos y mínimos absolutos en un intervalo cerrado.

En este punto es importante que recuerdes el teorema de Weierstrass:

Teorema

" Una función contínua en un intervalo cerrado tiene Máximo y Mínimo absolutos"

Para encontrar los extremos en un intervalo [a , b] bastará que:

1ro) Encuentres los puntos críticos pertenecientes al intervalo (a ,b).

2do) Calcules los valores funcionales en cada uno de ellos.

3ro) Calcules los valores funcionales en los extremos del intervalo , f(a) y f(b) .

4to) Compara todos esos valores funcionales . El **mayor** de ellos será el máximo absoluto y el **menor** , el mínimo absoluto.

No es necesario en este caso que clasifiques los puntos críticos del intervalo.

Intervalos no cerrados .

En caso de que el intervalo no sea cerrado deberás clasificar los puntos críticos y auxiliarte con alguna información adicional para encontrar los extremos absolutos, como ser la variación de la función en todo el intervalo de estudio utilizando el signo de la derivada 1ra. , límites en extremos abiertos o valores funcionales en extremos cerrados.

En los ejercicios encontrarás muy comúnmente un **único punto crítico** en el intervalo de estudio. Si lo clasificas como máximo relativo , dada la continuidad de la función, podrás asegurar sin más que es el máximo absoluto de la función. Idem en el caso de mínimo.

La clasificación puedes hacerla tanto usando el criterio de la derivada 1ra. como el criterio de la derivada 2da. visto antes.

En la resolución de los ejercicios verás que hemos utilizado en ocasiones uno de los criterio , en otras otros , y muchas veces hemos efectuado los cálculos mínimos para poder bosquejar el gráfico de la función en estudio como forma de afirmar tus conocimientos en la representación gráfica de funciones.

OPTIMIZACIÓN

ENUNCIADOS

Ejercicio No.1 - Cálculo – (Resol. Pag. 127)

a) De todas las parejas de números reales cuyas componentes tienen suma **S** dada encontrar aquella para la cual el producto **P** de las mismas es **máximo.**

b) Aplica lo anterior al caso S= 40

Ejercicio No.2 – Cálculo – (Resol. Pag. 128)

a) De todas las parejas de números reales cuyas componentes positivas tienen producto dado, encontrar aquella para la cual la suma de esas componentes es **mínima.**

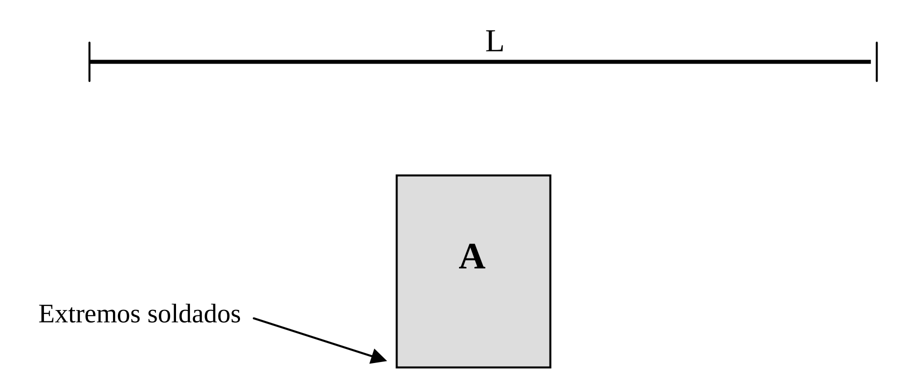
b) Aplica lo anterior al caso P = 100

Ejercicio No.3 - Cálculo - (Resol. Pag.129)

Demostrar que de todos los rectángulos de perímetro **p** dado, el de **máxima** área es el cuadrado.

Ejercicio No.4 - Geometría - (Resol.Pag.129)

Mediante dobleces hechos en un alambre rectilíneo de longitud dada **L** se desea limitar un área rectangular **A**. Los extremos del alambre se soldarán.



a) Indica en un esquema posibles posiciones de los puntos donde deberán efectuarse los dobleces.

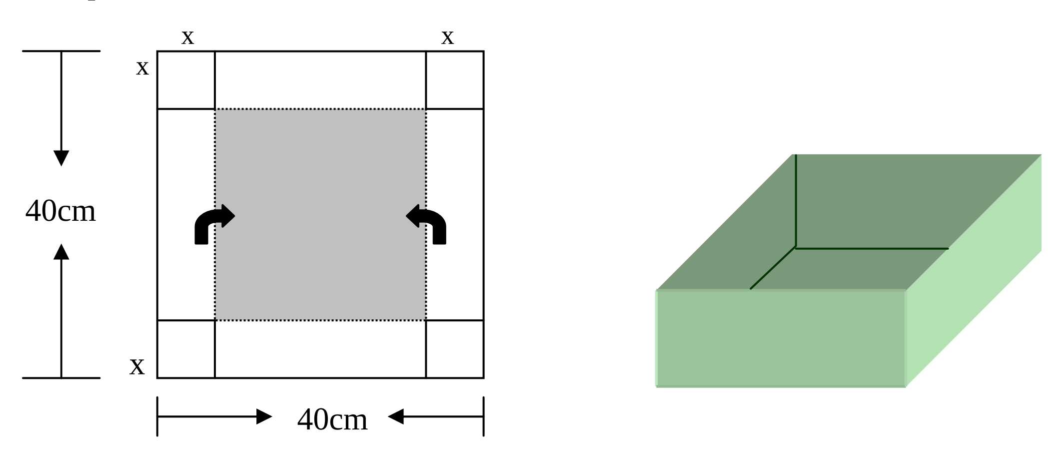
¿Cuántos rectángulos diferentes puedes construir? ¿ Crees que todos tienen igual área?

b) Encuentra una expresión para el área **A** en función de uno de los lados del rectángulo y bosqueja la función **A**.

c)¿ Cuál es el rectángulo de área **máxima** y cuánto vale su área.?

Ejercicio No.5 - Cálculo - (Resol. Pag. 130)

Se desean construir cajas de cartón sin tapa partiendo de cuadrados de lado 40 cm. a los que se les recortan las esquinas como indica la figura , y doblando a lo largo de las líneas punteadas.



a) ¿Es necesario que los recortes en las esquinas sean cuadrados?

b) Determina la longitud **x** de los recortes para que el volumen de la caja sea **máximo** , así como también el valor de ese volumen máximo.

Ejercicio No.6 - Cálculo – (Resol. Pag. 132)

Una empresa tiene capacidad de producir como máximo 15.000 unidades al mes de cierto producto.

El costo total de producción Ct en miles de dólares por mes responde a la expresión

$$C_t(q) = \frac{1}{3}q^3 - \frac{15}{2}q^2 + 36q + 81$$

donde **q** es el número de unidades producidas en miles de unidades por mes.

Determina la producción mensual de la empresa que **minimiza** el costo total de producción y calcula ese costo.

Ejercicio No. 7 - Costo de construcción – (Resol. Pag. 132)

El costo total **C** de construcción de un edificio de **n** pisos está expresado por:

$$C(n) = 2n^2 + 300n + 320$$

a) Expresa el costo medio por piso **Cm** en función de **n**.

.

b) Calcula el número de pisos a construir para que el costo medio por piso sea **mínimo**.

La respuesta deberá ser un número entero.

c) Si **C** está expresado en miles de dólares, calcula el costo total del edificio.

Ejercicio No. 8 – Química – (Resol. Pag. 133)

La masa **m** de agua que a 0°C ocupa un volumen de 1 litro, ocupará a **T** °C un volumen **V** en litros dado por la expresión:

$$V(T) = 10^{-5}\left(-6{,}8.10^{-3}T^3 + 8{,}5.\ 10^{-1}T^2 - 6{,}4.T + 10^5\right) \quad 0 \le T \le 10$$

Recordando que la densidad ρ de una sustancia homogénea es :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

a) Encuentra la temperatura **T** para la cual la densidad ρ del agua es **máxima** .

b) Bosqueja V(t) para $0 \le T \le 10$.

Ejercicio No.9 - Nivel de demanda – (Resol. Pag. 134)

La relación entre el precio de venta por unidad **p** de un artículo y la cantidad de unidades vendidas **q** (demanda) se conoce como "**función de demanda**" del artículo considerado.

Para un comercio que vende determinado artículo su función de demanda es:

$p(q)= 8,25.\ e^{-0.02\,q}$ **p** en miles de U$S **q** unidades por mes

El ingreso total **I** del comercio en miles de U$S / mes será entonces: I= p.q

a) Bosqueja la función de demanda p(q).

b) Encuentra el nivel de demanda que **maximiza** el ingreso total del comercio y calcula ese Ingreso mensual.

Ejercicio No. 10 -Nivel de demanda – (Resol. Pag. 136)

Una empresa distribuidora de café tiene una función de demanda dada por:

$$p = -0,3\,q^2 - 0,6\,q + 3000$$

p precio $\frac{U\$S}{Tonelada}$ **q** cantidad demandada en Toneladas

a) Representa gráficamente la función demanda.

b) Siendo el ingreso total **I** de la empresa el producto de la cantidad demandada por el precio de venta , I = q.p :

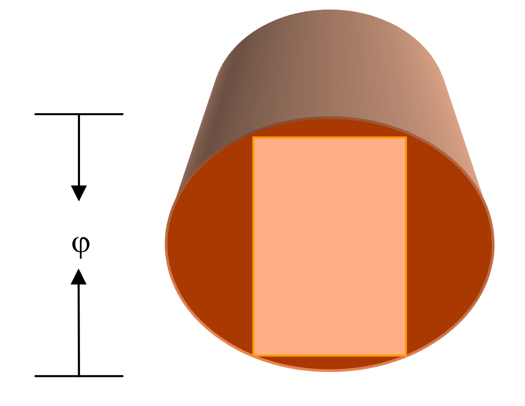
i) Halla el nivel de demanda que hace **máximo** el ingreso total.

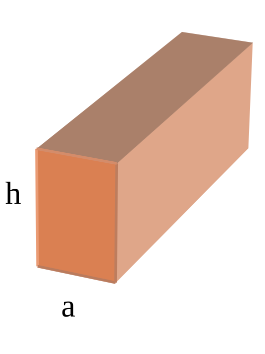
ii) Calcula ese ingreso máximo.

iii) Indica el precio de venta correspondiente de la tonelada de café.

Ejercicio No.11 - Aserrado de Viga – (Resol. Pag. 138)

La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho **a** por el cuadrado de su altura **h** .





a) Calcula las dimensiones de la viga de **máxima** resistencia que puede aserrarse de un tronco de madera de forma cilíndrica de diámetro **Φ** dado.

b) Aplícalo al caso Ø = 15'' (pulgadas).

c) Si el tronco tiene largo **L** expresa en porcentaje del volumen total de madera el volumen de la viga.

Ejercicio No. 12 -Aserrado de viga – (Resol. Pag. 139)

La rigidez de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho **a** por el cubo de su altura **h** .

a) Halla las dimensiones de la sección de la viga de máxima rigidez que puede cortarse de un tronco cilíndrico de diámetro Φ dado.

b) Aplícalo al caso Ø = 15'' (pulgadas)

c) Si el tronco tiene longitud **L** indica el % del volumen total usado en la viga.

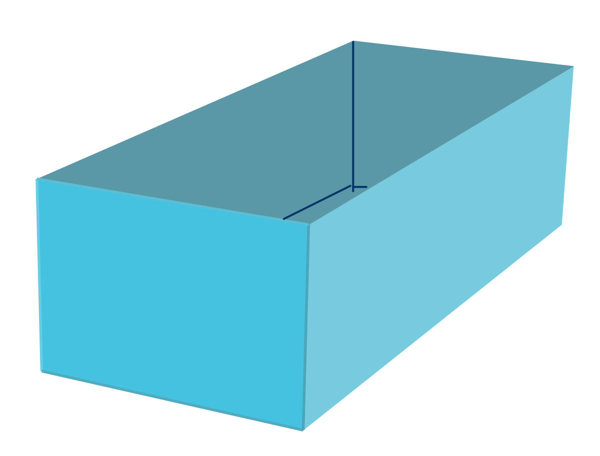
Ejercicio No. 13 – Costo de fabricación – (Resol. Pag. 141)

Se desea construir un tanque con forma de paralelepípedo rectangular de 45 m^3 de volumen , con la parte superior abierta según indica la figura.

El largo del rectángulo base debe ser doble del ancho .

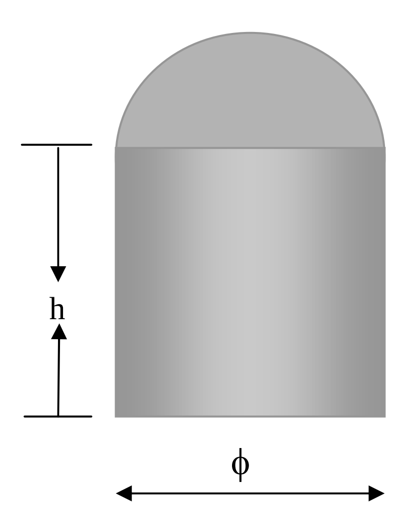
El material de la base tiene un costo de 100 \$ / m^2 y el de las paredes de 80 \$ / m^2 .

Determina las dimensiones del recipiente para que el costo de los materiales sea **mínimo**, así como el correspondiente precio del tanque.



Ejercicio No. 14 -Costo de construcción de silo – (Resol. Pag. 143)

Se desea construir un silo de forma cilíndrica rematado por un bóveda semiesférica. El costo de construcción por m^2 es doble en la bóveda que en la parte cilíndrica. Encuentra las dimensiones **h** y ϕ del silo de volumen **V** dado, de forma que el costo de construcción sea **mínimo**.



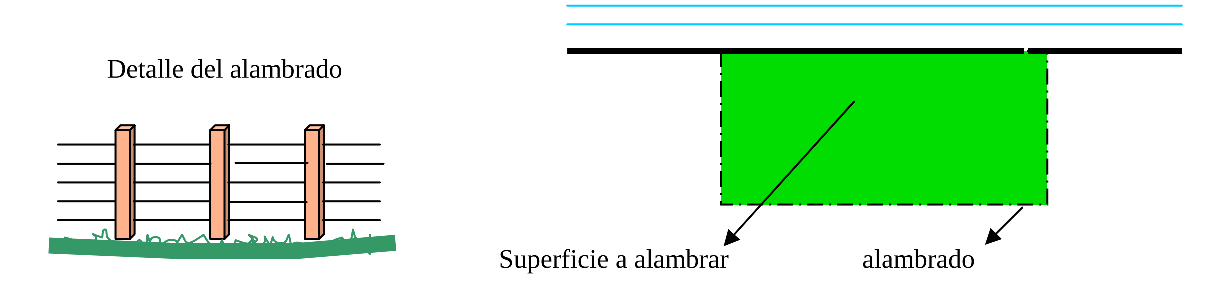
Ejercicio No.15 -Costo de alambrado - (Resol. Pag.144)

Sobre la ribera de un río cuya orilla se supone rectilínea se desea alambrar una superficie rectangular de 10 hectáreas. Admitiendo que el costo de alambrado es proporcional a la longitud a alambrar , dimensionar el rectángulo para que el costo de alambramiento sea **mínimo .**

Se supondrá que no se alambra sobre la ribera.

Recuerda que 1hectárea = 10.000 m^2.

Si el alambrado se construye con 5 hilos y el rollo de 1.000 m vale U$S 35 calcula además el costo del alambre necesario.



Ejercicio No.16 -Superficie de siembra – (Resol. Pag. 145)

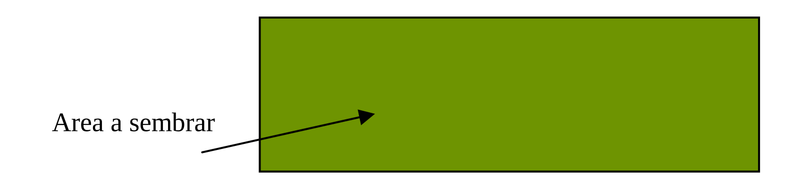
Un productor dispone de 600 hectáreas aptas para sembrar.

Sabe que la ganancia total **G** en $ que obtendrá de su producción dependerá del número de hectáreas sembradas x , de acuerdo a la expresión:

$$G(x) = 2000x - 2x^2$$

a) Calcula cuántas hectáreas debería sembrar para obtener **máxima** ganancia.

b) ¿En cuanto disminuiría su ganancia si sembrara las 600 hectáreas disponibles?



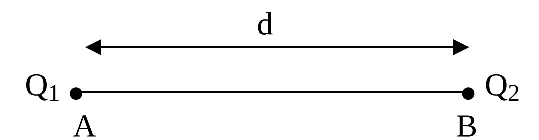
Ejercicio No.17 - Potencial eléctrico – (Resol. Pag. 146)

El potencial **V** en voltios en un punto que está a una distancia **r** de una carga puntual de **Q** Culombios está expresada por:

$$V = \frac{K.Q}{r}$$

siendo K una constante , r en metros .

Sean Q_1 y Q_2 dos cargas puntuales positivas que distan entre sí una distancia d.



a) Expresa el potencial V en un punto interior al segmento AB en función de la distancia del punto a la carga Q_1. (El potencial es la suma del producido por cada carga). Considera $Q_2=5Q_1$

b) Demuestra que existe un punto P del segmento AB donde el potencial **V** es **mínimo.**

c) Calcula ese potencial si $Q_1=5.10^{-10}$ Cul. $Q_2= 5\ Q_1$, d=5cm

$K= 9.10^9$ Volt.m / Cul^2

.

Ejercicio No.18 -Iluminación – (Resol. Pag. 147)

La intensidad de iluminación **E** en lux que produce un foco luminoso puntual en cualquier punto es directamente proporcional a la intensidad del foco **I** en candelas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia **d** al foco expresada en metros.

$$E = \frac{K.I}{d^2}$$

a) Si dos focos luminosos se encuentran a una distancia **L** y tienen intensidades I_1 e I_2, halla el punto del segmento que los une donde la iluminación sea mínima.

Se supondrá que la iluminación en cualquier punto es la suma de las iluminaciones producidas por cada foco .

I_1 L I_2

b) Aplícalo al caso: L =12 m $I_2 = 8\ I_1$

Ejercicio No.19 -Producción – (Resol. Pag. 149)

Un fabricante vende **x** artículos por semana a un precio unitario **p** que depende de **x** según la expresión:

$p(x)= 200 – 0,01x$ **p** en $.

El costo total de producción de **x** artículos es: $C(x)= 50x +20000$ $ /sem.

a) Calcula el número de artículos que el fabricante debe producir para obtener **máxima** ganancia y el correspondiente precio de venta por unidad.

b) Supongamos que el estado fija un impuesto de $10 por cada unidad vendida permaneciendo invariables las otras condiciones.

¿Qué parte del impuesto debe absorber el fabricante y cuál debe transmitir al comprador para obtener **máxima** ganancia?

Comparar las ganancias antes y después de establecido el Impuesto.

Ejercicio No.20 -Transporte – (Resol. Pag. 150)

Un empresario ha calculado que el costo total de repartir **x** unidades del producto que fabrica es:

$$C(x) = 2.x + 217800 / x$$

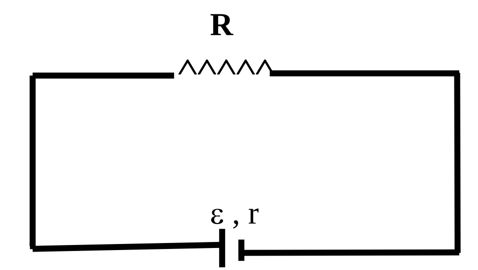
a) Si la unidad de reparto puede transportar como máximo 300 unidades de producto halla el número de unidades que hará **mínimo** el costo del pedido.

b) ¿Qué ocurriría si la unidad pudiera transportar hasta 400 unidades de producto?

Ejercicio No.21 -Circuito eléctrico - (Resol. Pag. 151)

Un generador de fuerza electromotriz constante **ε** y resistencia interna **r** se conecta a una resistencia de carga **R** .En esas condiciones la potencia **P** disipada por la resistencia **R** está expresada por la relación:

$$P = \frac{R.\varepsilon^2}{(R + r)^2} \qquad \text{R y r en } \Omega \text{ , V en voltios}$$

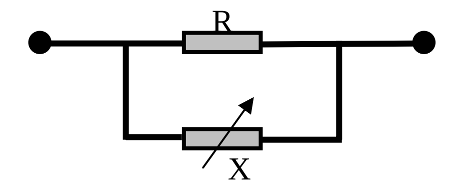


a) Halla el valor de R en función de **r** para que la potencia sea **máxima.**

b) Grafica P(R).

Ejercicio No.22 -Circuito eléctrico – (Resol. Pag. 152)

Se consideran dos resistencias conectadas en paralelo, siendo la resistencia **x** variable



a) Recordando que la resistencia equivalente Req. de un paralelo cumple:

$$\frac{1}{R_{eq.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

halla la expresión de Req en función de x .

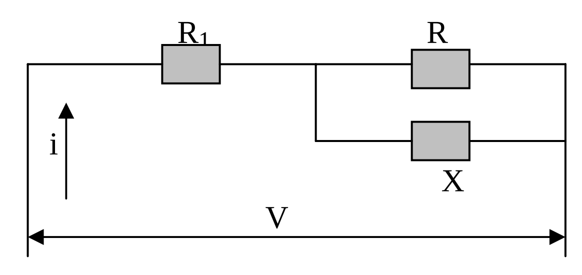
b) Si **x** varía en [0,+ ∞) demuestra que Req **no** puede superar el valor R.

Te sugerimos que grafiques $R_{eq.}(x)$.

c) Si $0 \leq x \leq R$ halla el valor **máximo** de Req.

Interpreta desde el punto de vista eléctrico los casos x = 0 y **x** infinito.

d) Considera ahora el circuito de la figura al que se le aplica un voltaje V constante.



Aplicando ley de OHM puedes deducir que : $i = \frac{V}{R_1 + R_{eq.}}$

Encuentra la expresión de **i** en función de x.

¿Cuánto vale **i** si x = 0 ?

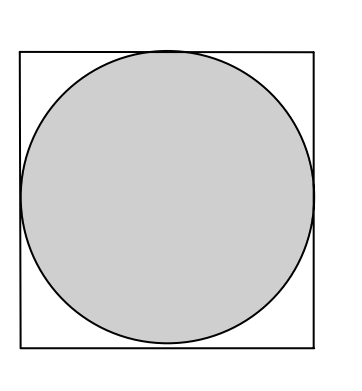
¿Qué papel juega la resistencia R_1 en el circuito desde el punto de vista eléctrico?

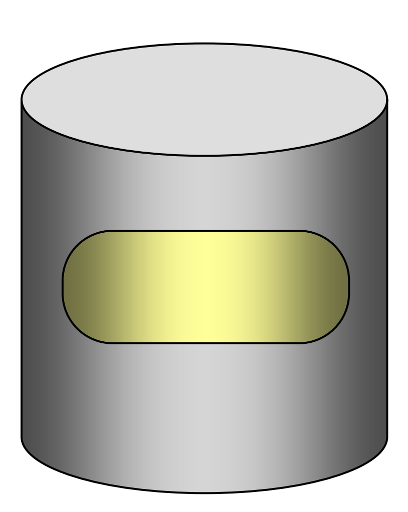
¿Qué sucedería si x = 0 y $R_1 = 0$?

Ejercicio No.23 -Dimensionado de envase – (Resol. Pag. 154)

Se desean fabricar envases cilíndricos de hojalata para lubricante de volumen **V** dado.

No se desperdicia material al cortar la hoja que constituye la pared cilíndrica , pero las bases se recortan de trozos cuadrados como indica la figura , desperdiciándose los recortes.





a) Halla la relación entre la altura y el diámetro de la base para que el gasto de material incluído el desperdicio , sea **mínimo .**

b) Aplica los resultados para el caso V = 1 lt.

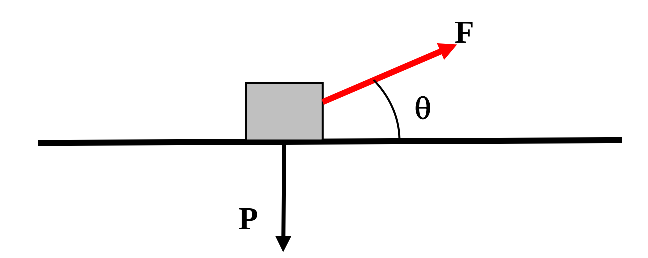
c) ¿Cuál es el porcentaje de material desperdiciado respecto al total usado?

Ejercicio No.24 -Física – (Resol. Pag. 156)

Se desea poner en movimiento un cuerpo arrastrándolo sobre una superficie mediante la aplicación de una fuerza F como indica la figura.

Siendo μ el coeficiente de razonamiento entre el cuerpo y la superficie y **m** la masa del cuerpo, puede deducirse , aplicando principio de la dinámica que:

$$F(\theta) = \frac{\mu.m.g}{\cos\theta + \mu.\text{sen}\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



a) Calcula el ángulo θ para el cual la fuerza **F** necesaria sea **mínima.**

b) Calcula la correspondiente fuerza **F** si μ = 0.4 , m = 80 kg , $g = 9.8\ m/s^2$

Ejercicio No.25 -Resonancia mecánica – (Resol. Pag. 159)

Un cuerpo de masa **m** unido a un resorte, oscila sometido a la acción de una fuerza **F** de variación sinusoidal y frecuencia angular **ω**: $F = F_0.\text{sen}\,(\omega t)$ en un medio que ofrece resistencia al movimiento.

Bajo esas condiciones la amplitud **A** de la oscilación viene expresada por:

$$A(\omega) = \frac{C_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + C_2\omega^2}}$$

con ω_0 , C_1 , y C_2 constantes.

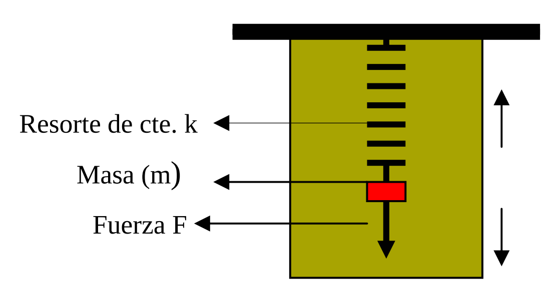
ω_0 es la llamada " **frecuencia propia del sistema** " cuyo valor es : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ donde

K es la constante del resorte expresada en Newton / metro.

C_2 es una constante relacionada con la resistencia ofrecida por el medio en el cual oscila el resorte.

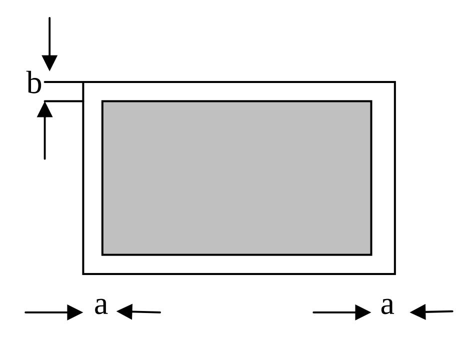
Determina el valor de **ω** que hace máxima la amplitud **A** ,y el correspondiente valor de **A** si $\omega_o^2 > C_2 / 2$.

El valor de **ω** que encontrarás se conoce como **"frecuencia de resonancia"** y el correspondiente valor de **A** **"amplitud de resonancia".**



Ejercicio26 -Superficie de almacenamiento – (Resol. Pag, 160)

Una fábrica necesita una superficie de piso de forma rectangular y área **A** m^2 para estiba de materiales. Para cerrar esa superficie se construirán paredes de espesores fijos de **a** metros y **b** metros como indica la figura.



a**)** Dimensiona el rectángulo de estiba para que la superficie rectangular exterior necesaria sea **mínima**.

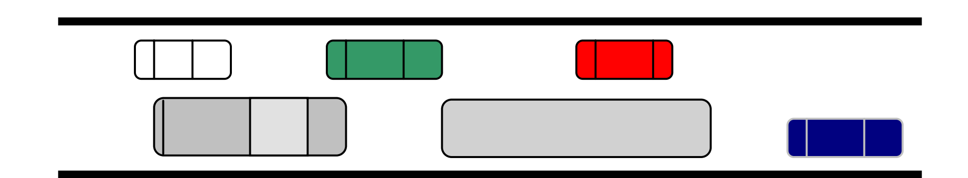
b) Demuestra que en ese caso también es **mínima** la superficie de piso ocupada por las paredes.

c) Aplicar los resultados para el caso A = 100 m.², a = b = 0,20 m.

Ejercicio No.27 - Flujo Vehicular – (Resol. Pag. 162)

El Ministerio de Transporte con el fin de determinar la variación de la velocidad del flujo de vehículos que provenientes del Este regresan a Montevideo los días domingos entre las 17:00 horas y las 22:00 horas, ha efectuado mediciones que indican que la velocidad del tránsito a la entrada de la capital en ese lapso esta dada aproximadamente por la expresión:

$$V(t) = \frac{80}{9}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 4t\right) + \frac{1180}{27} \qquad \text{Km / h} \qquad t = 0 \text{ a las } 17 \text{ horas}$$



a) ¿En qué momento entre las 17:00 horas y las 22:00 horas el tránsito es más rápido y en qué momento es más lento?.

b) Grafica V(t) para $0 \le t \le 5$.

Ejercicio No.28 - Alquiler de apartamentos – Resol. Pag. 163)

Una inmobiliaria es dueña de 150 apartamentos que se ocupan en su totalidad si el alquiler es 300 dólares.

Se sabe que al aumentar el alquiler el número de apartamentos alquilados disminuye linealmente a razón de 5 aptos. por cada 30 dólares de aumento.

a) Expresa la ganancia **G** en función del número **x** de apartamentos alquilados y grafica la función.

b) ¿Cuál es el número de apartamentos a alquilar y cuál su alquiler mensual para que la inmobiliaria obtenga **máxima** ganancia?

c) ¿Cuánto perdería la empresa si alquilara todos los apartamentos?

Ejercicio No.29 - Eficiencia Laboral – (Resol. Pag. 164)

Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores del turno matutino de una fábrica indica que el número **N** de artículos ensamblados por un trabajador promedio está dada por la relación:

$$N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$$

siendo **t** el tiempo transcurrido desde el inicio del turno (8:00 a 13:00 hrs.)

a) Grafica la curva de producción N(t) para $0 \le t \le 5$.

b) ¿A qué hora de mañana la tasa de producción ($\frac{dN}{dt}$) del trabajador (eficiencia) es **máxima**?.

c) ¿A que hora es **mínima**?.

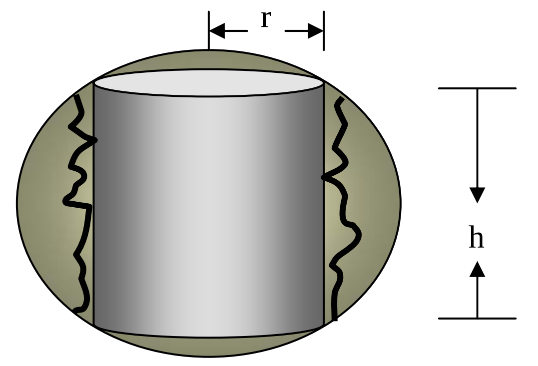
d) Grafica la tasa de producción para $0 \le t \le 5$.

Ejercicio No. 30 - Geometría – (Resol. Pag. 165)

Se consideran los cilindros rectos de base circular de radio **r** y altura **h** inscritos en una esfera de radio **R** dado.

.

.



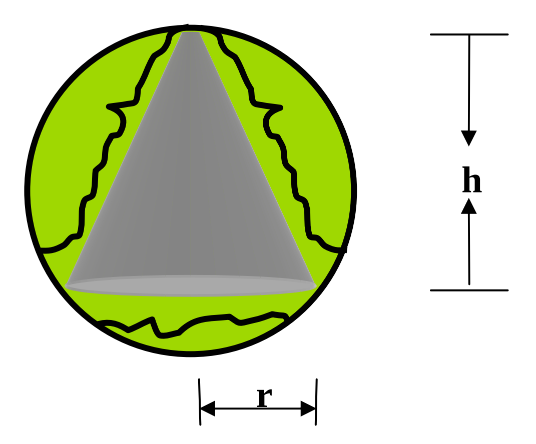
a) Determina **r** y **h** para que el cilindro tenga volumen **máximo.**

b) Determina las dimensiones **r** y **h** para que el cilindro tenga superficie lateral **máxima.**

c) ¿ Qué porcentaje del volumen de la esfera ocupa el cilindro de máximo volumen?

Ejercicio No.31 -Geometría – (Resol. Pag. 167)

Encuentra las dimensiones **r** y **h** del cono recto de base circular de volumen **máximo** que puede inscribirse en una esfera de radio **R** dado.



Ejercicio No.32 -Utilidad de un fabricante- (Resol. Pag. 168)

Un fabricante de cierto repuesto para equipos de audio los produce a un costo de $150 cada uno .

Ha determinado que si el precio de venta es **p** $ / unidad , la demanda **q** está expresada por:

$$q(p) = 1000\, .e^{-0.004\, p}$$

a) ¿A qué precio crees que deberá venderlos para tener **máxima** utilidad?

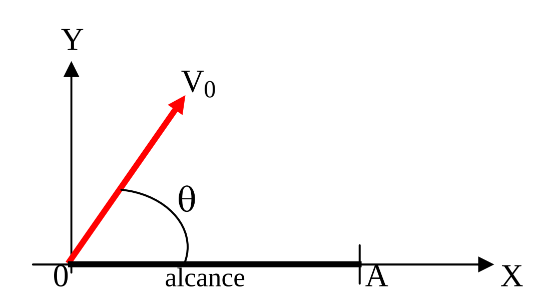
b) ¿Cuántas unidades venderá mensualmente y cuáles serán sus utilidades?

Ejercicio No.33 - Proyectil – (Resol. Pag. 170)

Se lanza un proyectil en el vacío desde un punto 0 (ver figura) con velocidad V_0 y ángulo de inclinación θ.

En el sistema (XOY) indicado, la trayectoria del proyectil responde a la función:

$$Y(x) = \frac{-g}{2v_0^2.\cos^2\theta}.x^2 + (\text{tg}\,\theta).x \qquad 0 \leq \theta \leq \pi / 2 \qquad g = 9.8 \text{ m} / \text{s}^2$$



a) Indica qué tipo de curva es la descripta por el proyectil.

b) Para **Vo** y θ dadas, encuentra la altura **máxima** (h_{max}) que alcanza el proyectil.

c) Suponiendo θ constante, grafica la variación de (h_{max}) en función de $\mathbf{V_0}$.

d) Suponiendo $\mathbf{V_0}$ constante, grafica la variación de (h_{max}.) en función de θ .

Calcula el alcance **L** del proyectil y suponiendo $\mathbf{V_0}$ constante , grafica **L** como función de θ, indicando el valor θ_0 que da **máximo** alcance.

Ejercicio No.34 - Transporte – (Resol. Pag. 173)

Una locomotora que se desplaza a una velocidad **v** Km/h. tiene un gasto de combustible $\mathbf{G_c}$ que es proporcional a $\mathbf{v^2}$. Llamando **K** a la constante de proporcionalidad:

$$G_c(v) = K\,v^2 \quad \text{en} \quad \$/h$$

Tiene además un gasto $\mathbf{G_1}$ en ($/h) que es independiente de la velocidad y que asciende a 3600 $/h.

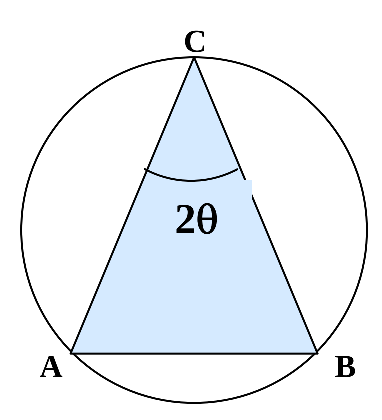
a) Determina la constante **K** sabiendo que si la locomotora viaja a 40 Km/h. el gasto de combustible es de $1600.

b) Halla la expresión del gasto total **G** en $/hora de la locomotora en función de **v**.

c) Halla el costo total C(v) , encuentra la velocidad más económica para el desplazamiento de la locomotora , y calcula el costo de un viaje de 1000 km.

Ejercicio No.35 - Geometría – (Resol. Pag. 174)

Considera una circunferencia de radio **R** dado. Se inscriben en ella triángulos isósceles ABC .



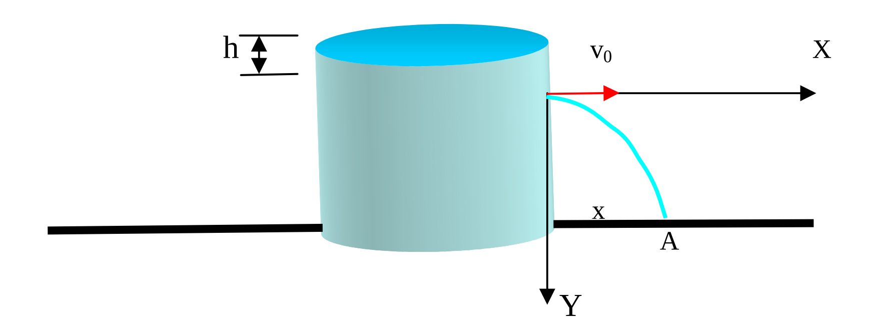
a) Calcula el perímetro de los triángulos en función del ángulo θ.

b) Halla el triángulo de perímetro **máximo**.

Ejercicio No.36 - Hidráulica – (Resol. Pag. 176)

Un tanque de 2m de altura apoyado en el piso se mantiene lleno de agua mientras que por un orificio practicado en una de sus paredes escapa un chorro que golpea el piso en el punto A a una distancia **x** de la pared.

Admite que el chorro tiene forma parabólica y que en el sistema (XY) indicado su ecuación es: $Y = \frac{g}{2.v_0^2}.x^2$

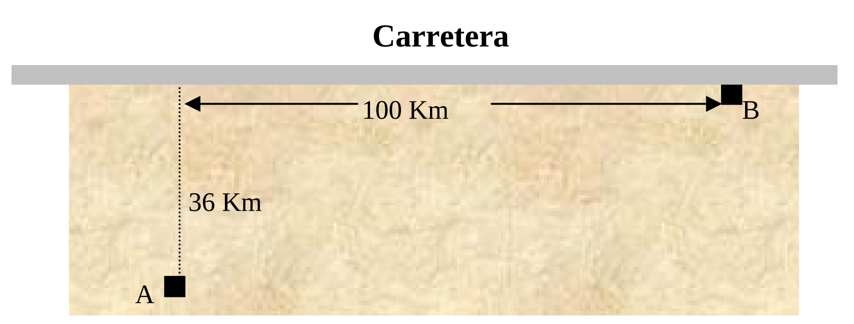


Donde $\mathbf{v_0}$ es la velocidad del chorro a la salida del orificio y **g** la aceleración de la gravedad.

Sabiendo que $v_0 = \sqrt{2.g.h}$ te pedimos que determines la profundidad **h** a que debe encontrarse el orificio para que el chorro golpée el piso a **máxima** distancia del tanque.-

Ejercicio No.37 – Tiempo mínimo de recorrido. – (Resol. Pag. 177)

Un vehículo debe trasladarse desde el punto A hasta el punto B de la figura. El punto A dista 36 Km de una carretera rectilínea .Sobre la carretera el vehículo puede desarrollar una velocidad de 100 Km / h , mientras que sobre el terreno puede desarrollar una velocidad de 80 Km / h.

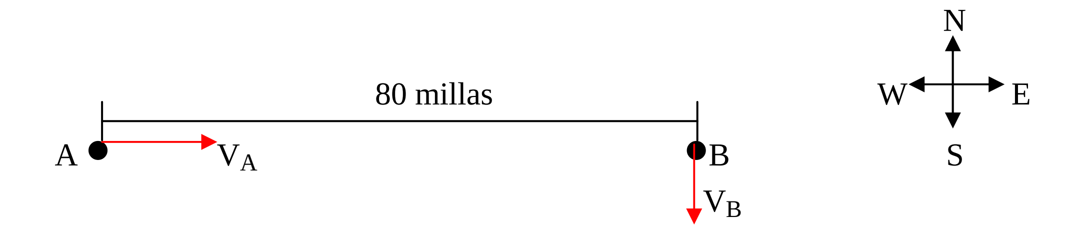


a) Se desea saber cuál es el recorrido que debe realizar el conductor para que el tiempo empleado en ir desde A hasta B sea **mínimo**.

b) Calcula ese tiempo.

Ejercicio No.38 – Distancia mínima entre barcos – (Resol. Pag. 178)

A la hora 12:00 del mediodía dos barcos A y B se encuentran en el océano a una distancia de 80 millas náuticas como indica la figura.



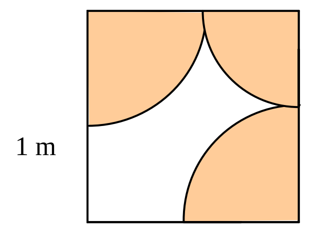
El barco A navega hacia el Este a una velocidad V_A de 20 nudos y el barco B navega hacia el Sur a una velocidad V_B de 25 nudos. Si las rutas iniciales no se modifican:

a) ¿A qué hora crees que la distancia entre los barcos es **mínima?**

b) Calcula esa distancia en Km.

Recuerda que: 1 nudo = 1 milla naútica / hora 1 milla naútica = 1852,2 m.

Ejercicio No.39 - Geometría - (Resol. Pag. 180)



Se considera un cuadrado de lado 1m. En tres vértices consecutivos de él se toman los centros de tres circunferencias de forma que los radios de las que tienen centros en vértices consecutivos, sumen 1m. (ver figura).

a) Encuentra los valores extremos de los radios de forma que los cuadrantes de círculo sombreados no se solapen.

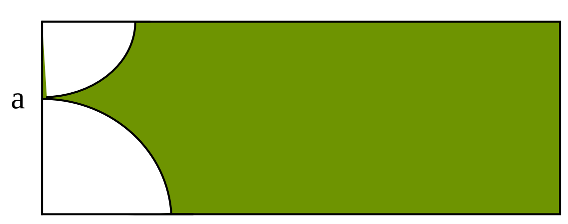
b) Halla los radios de las circunferencias para que el área sombreada sea:

i) **máxima** ii) **mínima**

c) Calcula dichas áreas.

Ejercicio No.40 – Geometría – (Resol. Pag. 181)

Sea un rectángulo de lados **a** y **b** con b>a. En los vértices de uno de los lados de longitud **a** se consideran dos cuadrantes de círculo con centros en aquellos , y radios cuya suma es **a**.



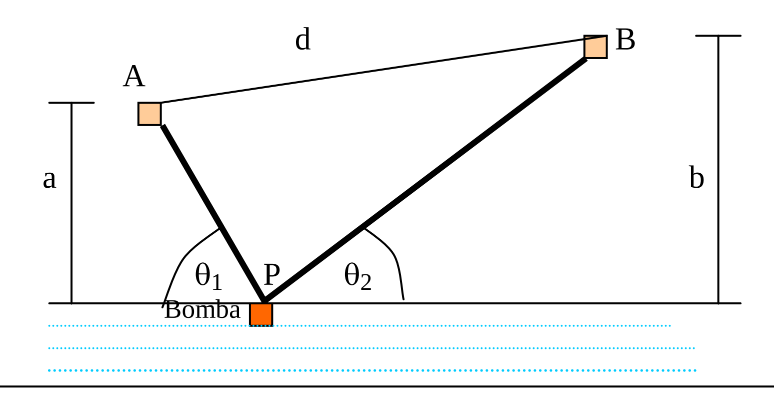
a) Halla los radios de los círculos para que el área sombreada del rectángulo sea:

i) máxima ii**) mínima**

b) Calcula dichas áreas en función de **a** y **b**

Ejercicio No.41 – Longitud de tubería- (Resol. Pag. 183)

Dos tanques A y B situados entre si a una distancia de **d** Km. se encuentran ubicados a un mismo lado de la orilla rectilínea de un río y a una distancia de éste de **a** Km y **b** Km .respectivamente fig (1).



Se desea ubicar sobre la orilla una bomba para alimentar de agua a los tanques mediante tuberías rectilíneas PA y PB.

a) Demuestra que la longitud de tubería será **mínima** cuando se cumpla que: $\theta_1 = \theta_2$

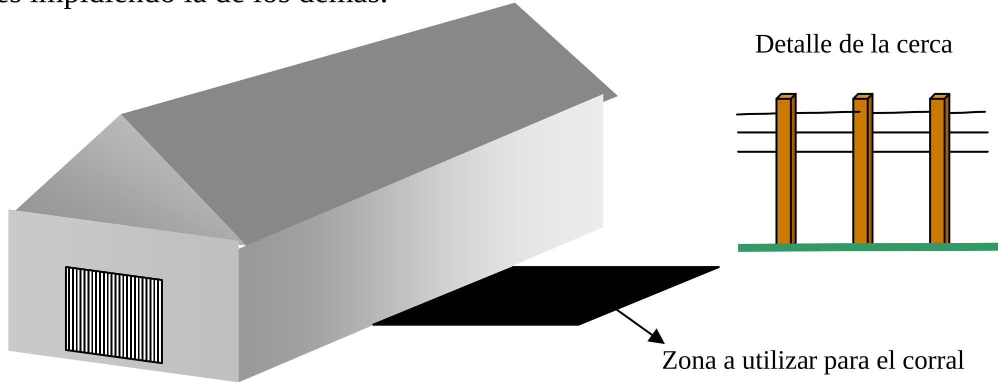
(Admite que el punto crítico que encontrarás corresponde a un mínimo).

b) Calcula la distancia **x** que permite ubicar la posición de la bomba en función de a , b y d para las condiciones de la parte **a)** .

c) Calcula la longitud total de tubería si a = 1,5 Km. b = 3 Km. d = 3,5 Km. así como la posición del punto P.

Ejercicio No.42 - Construcción de corral - (Resol. Pag. 185)

Utilizando una de las paredes laterales de un galpón (como indica la figura) se desea construir un corral para alimentar libremente a un grupo de terneros. El corral tendrá sección rectangular y se utilizarán tres tiros de alambre, el más bajo de los cuales se colocará a una altura tal que permita la entrada de los pequeños animales impidiendo la de los demás.



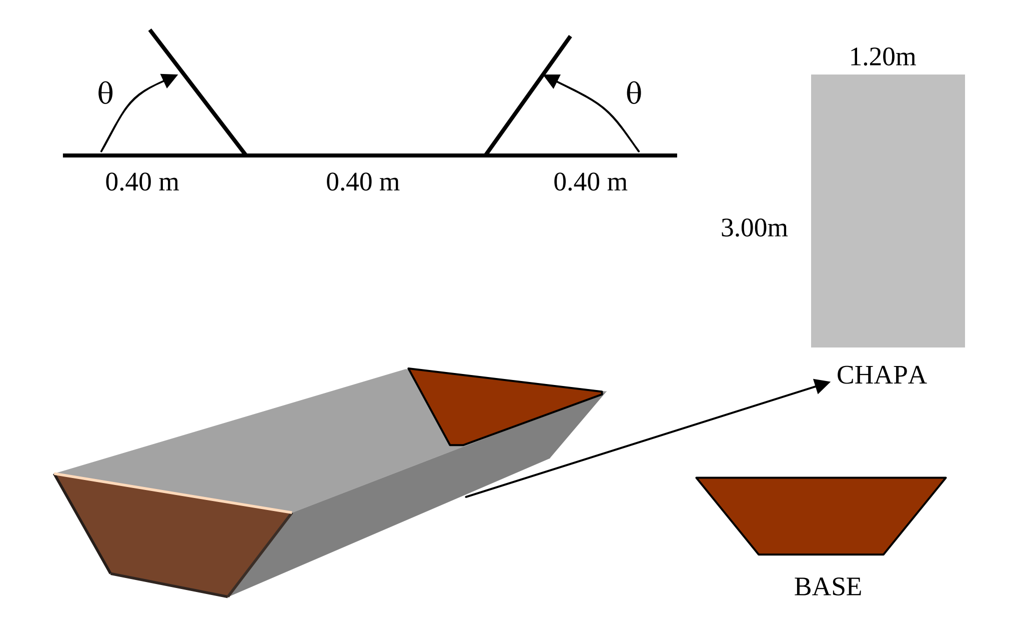
a) Se ha calculado que el área necesaria de corral es de 100 m² siendo el largo de la pared de 20m. Dimensiona el rectángulo para que el costo de alambre a utilizar sea mínimo.

b) Calcula el costo del alambre necesario si el rollo de 1000 m cuesta U$S 35.

Ejercicio No.43 – Construcción de bebedero – (Resol. Pag. 186)

Se dispone de una chapa metálica de forma rectangular de 1,20m x 3m.

Se desea construir con ella un bebedero para animales procediendo a doblar la chapa como indica la figura , para formar la superficie lateral y el fondo.



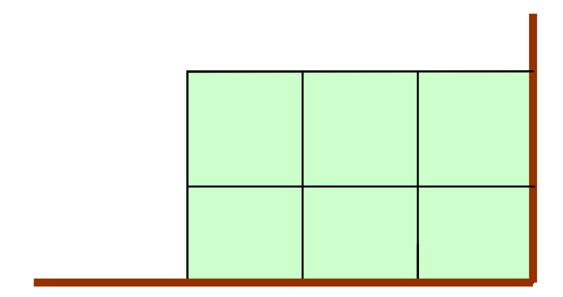
Las bases se confeccionan de madera dura.

a) Determina el ángulo θ para que el volumen del bebedero sea **máximo**.

b) Calcula dicho volumen en litros.

Ejercicio No.44 -Construcción de corrales – (Resol. Pag.188)

Contiguo a dos paredes perpendiculares se desea construir un corral de sección rectangular que estará subdividido en seis partes iguales colocadas en dos filas de tres cada una, según indica la figura.
Para el cercado se dispone de 100 m de tejido.



a) Encuentra las dimensiones de cada parte para que el área encerrada sea **máxima.**

b) Calcula esas áreas.

Ejercicio No.45 - Costo de producción – (Resol. Pag. 188)

Una fábrica de artículos de plástico recibe un pedido de 8000 unidades de cierto juguete para ser comercializado en Navidad y Día de Reyes.

La fábrica posee 15 máquinas, cada una de las cuales puede producir 30 juguetes por hora. El costo de poner en funcionamiento las máquinas es de U$S 20 por máquina.

Una vez puestas en funcionamiento la operación está completamente automatizada de forma que sólo necesita de un supervisor de producción cuyo salario es de 4.80 U$S por hora.

a) ¿Cuántas máquinas deberán ponerse en funcionamiento para que el costo de producción sea **mínimo**?

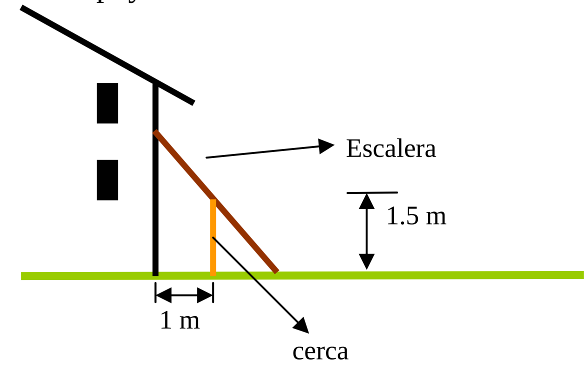
b) ¿Cuántas horas trabajarán las máquinas para cumplir con el pedido y cuánto ganará el supervisor?

c) ¿Cuál es el costo de puesta en funcionamiento del número óptimo de máquinas?

Ejercicio No.46 - Longitud de escalera – (Resol. Pag. 190)

Se desea colocar una escalera apoyada en el suelo y en la pared de un galpón como se muestra en la figura.

Paralelamente a la pared del galpón y a 1m. de distancia corre una cerca de 1.50 m de altura. La escalera se apoyará también sobre la cerca.



a) Calcula la longitud **mínima** que deberá tener la escalera para cumplir con las condiciones pedidas (se sugiere expresar la longitud de la escalera en función del ángulo que la misma forma con el piso).

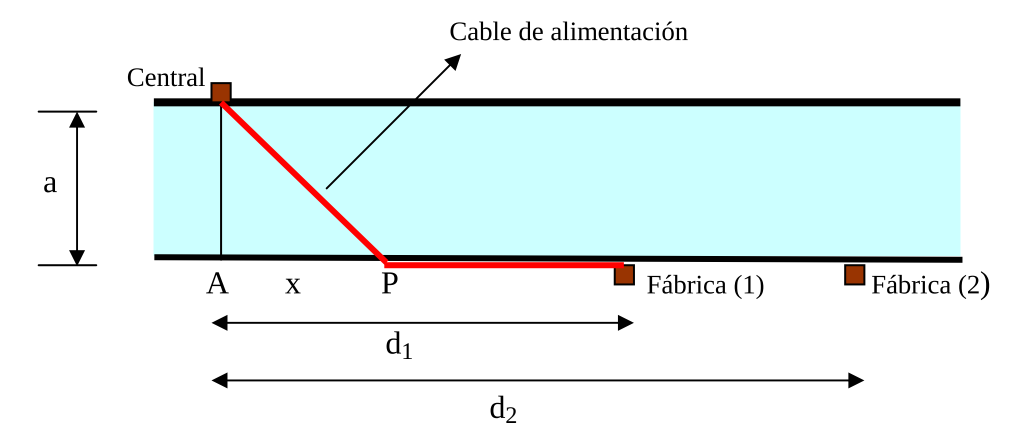
b) ¿A qué altura de la pared del galpón apoyará la escalera?

c) ¿ A qué distancia de la cerca apoyará la escalera sobre el suelo?

Ejercicio No.47 – Costo de instalación - (Resol. Pag. 192)

Sobre una de las orillas de un río se encuentra una **central eléctrica** y sobre la orilla opuesta una **fábrica** (1) a una distancia d_1 metros aguas abajo, según figura. El ancho del río es de (a) metros.

La fábrica solicita el tendido de un cable de alimentación eléctrica que la dirección técnica de la central decide tendrá una parte sobre el lecho del río y la otra a lo largo de la orilla.



a) Si el costo del tendido bajo el río es de **n** (dólares / metro) y a lo largo de la orilla es de **p** (dólares / metro) , se desea conocer la posición del punto P de manera que el costo total de instalación sea **mínimo** , siendo **n** > **p**.

b) Calcula el costo total de instalación y la posición del punto P para que ello ocurra en el caso: a = 500 m; d_1 = 2500 m n=50 U$S/ m y p = 30 U$S/ m.

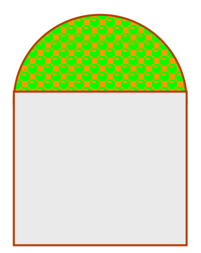
c) Una segunda fábrica (2) solicita un tendido similar. Si la distancia d_2 = 4000m, ¿cuál será la nueva posición del punto P? Justifica tu respuesta.

Ejercicio No. 48 - Iluminación – (Resol. Pag. 194)

Una ventana de perímetro **p** dado, tiene la forma de la figura.

La parte rectangular es de cristal transparente y la semicircular de cristal coloreado.

Esta última permite pasar, por m^2 de superficie , sólo la mitad de la luz que permite la parte rectangular.



.

Admite que la cantidad de luz que atraviesa la ventana es proporcional a la superficie.

En esas condiciones se te pide que dimensiones la ventana para que ella permita el paso de la **máxima** cantidad de luz.

Ejercicio No.49 - Transporte de caños - (Resol. Pag. 195)

Se consideran dos parejas de semirectas [P(a),P(b)] y [Q(c), Q(d)], figura (1).

Considera la familia de segmentos A_iB_i que cumplen:

A_i pertenece a la semirecta P(a) , B_i pertenece a la semirecta P(b) y Q pertenece al segmento A_iB_i , fig. (2) .

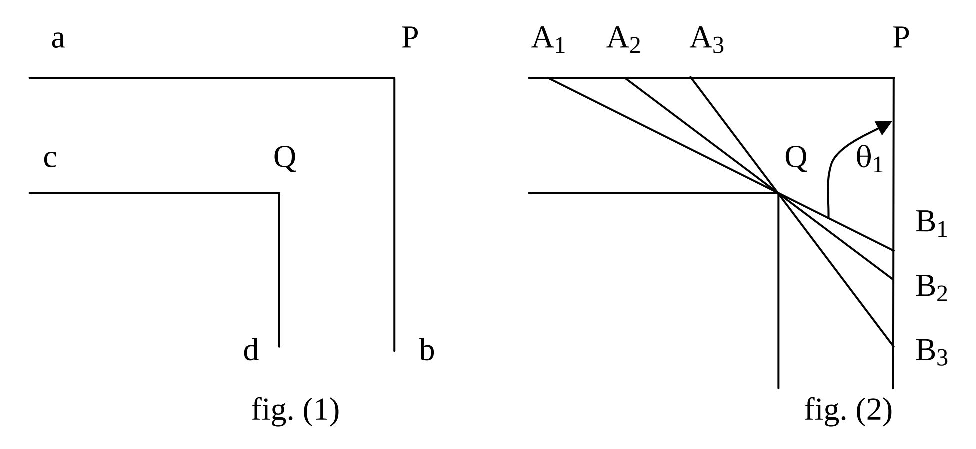


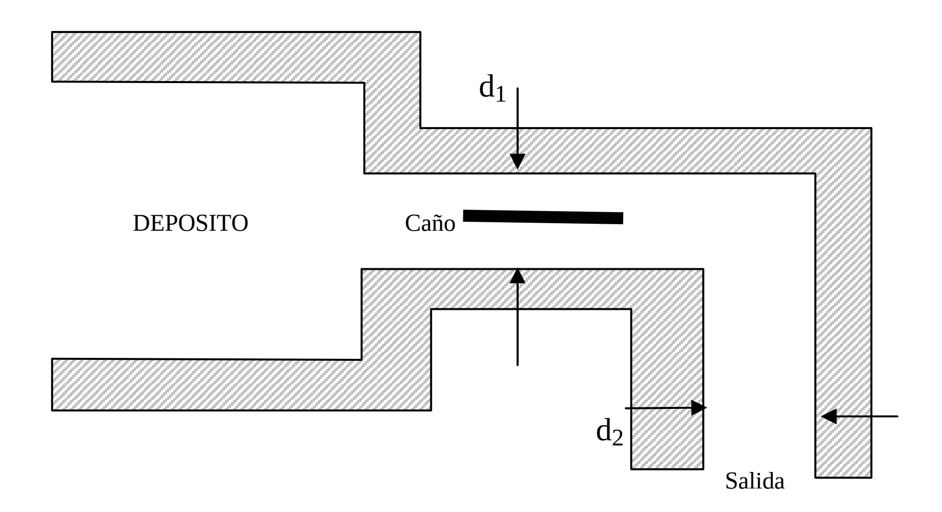
fig. (1) fig. (2)

a) Halla una expresión para la longitud $\mathbf{L_i}$ de los segmentos A_iB_i en función del ángulo θ indicado en la figura (2) , con $0 < \theta < \pi / 2$.

Bosqueja la función **L** hallada .

b) Desde un depósito dos operarios deben transportar horizontalmente caños rígidos hasta la salida a través de un corredor en ángulo recto como indica la figura (3).

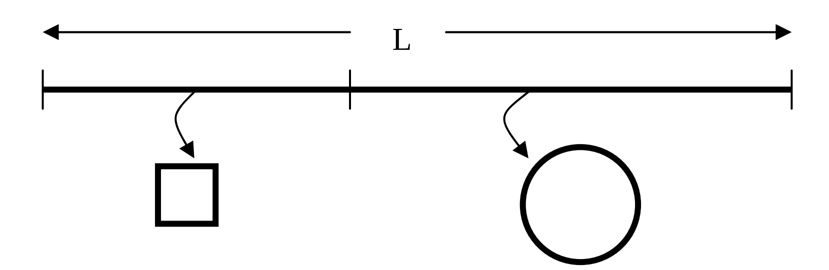
¿ Qué condición debe cumplir la longitud del caño para que el mismo pueda pasar por el codo del corredor si los anchos de los mismos son: $d_1 = 2,5$ m y $d_2 = 2$m.



Si la longitud de los caños es múltiplo entero del metro, ¿ cuál es el caño de mayor longitud que permite la operación?

Ejercicio No. 50 – Geometría – (Resol. Pag. 197)

Se dispone de un alambre rectilíneo de longitud **L** , y se desea cortarlo en dos trozos construyendo con uno de ellos una circunferencia y con el otro un cuadrado.



Te pedimos que determines el punto de corte del alambre para que :

a) La suma de las áreas del círculo y el cuadrado sea **mínima.**

b) Idem para que sea **máxima**. Discute este caso.

Ejercicio No. 51 – Optica – (Resol. Pag.199)

El principio de FERMAT establece que: " la luz sigue, entre dos puntos A y B , la trayectoria que corresponde a tiempo mínimo de recorrido".

Sean A y B dos puntos pertenecientes a medios de propagación diferentes (I) y (II), separados por una superficie según indica la figura (1).

Se desea determinar cual es la trayectoria que sigue un rayo de luz para ir desde el punto A al punto B, siendo V_1 y V_2 las velocidades en los medios (I) y (II).

A • medio (I)

B • medio (II)

Superficie de separación fig (1)

Te pedimos que demuestres que esa trayectoria debe ser tal que se cumpla la

relación: $$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

Esta relación es conocida como “Ley de la refracción de la luz o Ley de Snell”.

Los ángulos $\boldsymbol{\theta_1}$ y $\boldsymbol{\theta_2}$ son los indicados en la figura (2).

Te sugerimos calcular el tiempo total de recorrido en función de la distancia **x** siendo la distancia **d** conocida.

Recuerda que el rayo de luz se propaga con movimiento rectilíneo uniforme.

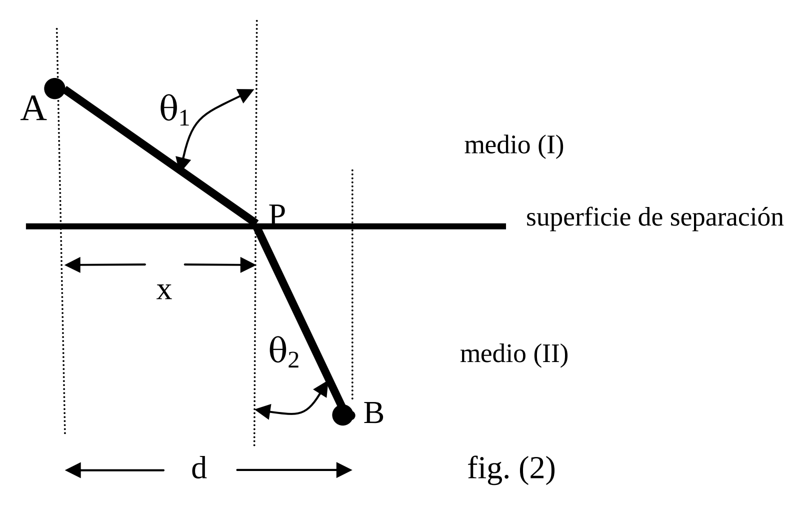


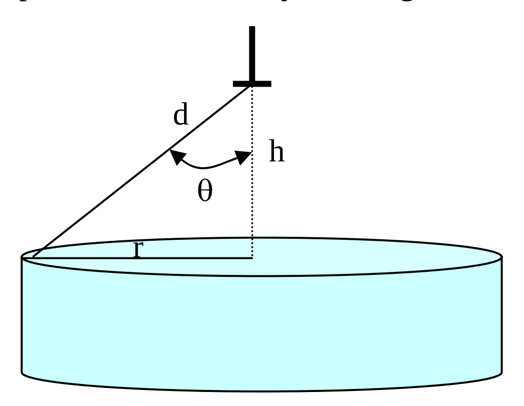
fig. (2)

Ejercicio No.52 – Iluminación - (Resol. Pag. 202)

Se desea iluminar un estanque de sección circular de radio R mediante una lámpara de altura ajustable colocada sobre la vertical que pasa por el centro de aquél.

La iluminación en el borde del estanque, que es la zona de menor iluminación de la superficie, está expresada por la relación: $E = \dfrac{I.\cos\theta}{d^2}$

donde **E** es la iluminación expresada en lux , **I** la intensidad del foco luminoso supuesto puntual , expresada en candelas y θ el ángulo indicado en la figura.



a) Halla y grafica la función **E** para $0 \leq \theta \leq \pi /2$.

Verifica que existe un valor de θ para el cual la iluminación **E** es **máxima** , y determina la altura a la que debe colocarse la lámpara para obtenerla.

b) Calcula la iluminación **E** en lux si I = 500 candelas y r = 2m.

Ejercicio No.53 – Resonancia serie – (Resol. Pag.204

Se considera un circuito serie R-L-C como indica la figura, al que se le aplica un voltaje V(t) de variación sinusoidal dada por la expresión:

$$V(t) = V_0 \mathrm{sen}(\omega.t)$$

La intensidad **I** de la corriente que circula por el circuito viene dada por la expresión:

$$I(t)= I_0.\ \mathrm{sen}\ (\omega.t + \varphi\ )$$

El valor máximo I_0 está dado por la expresión: $I_0 = \frac{V_0}{Z}$

donde Z es la impedancia del circuito y vale:

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

a) Expresa I_0 como función de ω.

b) Suponiendo que la frecuencia angular ω de la fuente puede variarse, halla el valor de ω que corresponde al **máximo valor de** I_0.

(El valor que hallarás se conoce como "**frecuencia de resonancia**")

c) Grafica Z como función de ω , $\forall\omega>0$

Ejercicio No.54 – Migración de peces –

Se ha estudiado que ciertos animales (peces, aves, etc) efectúan sus desplazamientos tratando de minimizar su gasto de energía.

Considera un tipo de peces migratorios que nadan a contracorriente. Llamemos:

v velocidad del pez respecto de la corriente, **u** velocidad de la corriente , u<v.

La energía (E) necesaria para nadar una distancia (d) está expresada por la relación:

$$E(v) = \frac{K.v.^3 d}{v-u} \qquad \text{con } \mathbf{K} \text{ y } \mathbf{u} \text{ constantes.}$$

a) Encuentra el valor de **v** que hace **mínima** la energía **E** y muestra que ese valor es un 50% mayor que el valor de **u**.

b) Bosqueja la función **E** para v > u.

Ejercicio No.55 – Inventario – (Resol. Pag.205)

Una empresa que utiliza transistores compra 1000 cajas al año a un precio de 50 U$S / caja.

Los gastos de envío son de 40 U$S/ pedido

y los gastos de almacenamiento de 2U$S por caja y por año.

Suponiendo que los transistores se utilizan a ritmo constante y que cada pedido llega justo cuando el anterior se ha agotado, te pedimos:

a)¿Cuántas cajas debe solicitar la empresa en cada pedido para que su costo anual sea **mínimo**? (todos los pedidos tienen igual número de cajas).

b)¿ Cuántos pedidos debe efectuar al año , cuál es el costo total y por pedido?

Ejercicio No.56 – Velocidad económica de transporte –(Resol. Pag. 206)

Un camión debe transportar desde Montevideo a Paysandú un cargamento de computadoras por valor de U$S 50000. Se supone que el viaje se hará a velocidad constante **v** Km / h.

Las normas de circulación establecen que: 40 Km/h ≤ v ≤ 90 Km/h .

El consumo de combustible viene expresado por la relación: $G_c = \left(10 + \dfrac{v^2}{250}\right)$ lt/h

El conductor cobra un salario de 5 U\$S/h y se supone que no infringe las normas de velocidad.

Si el combustible vale 0.50 U\$S/ lt te pedimos:

a) Calcula el costo de combustible $\mathbf{C_c}$ en U\$S / Km.

b) Calcula el costo de salario en U\$S / Km y el costo total en U\$S / Km en función de **v**.

c) Determina cuál es la velocidad más económica para la empresa y el costo del viaje si la distancia recorrida fue de 400 Km.

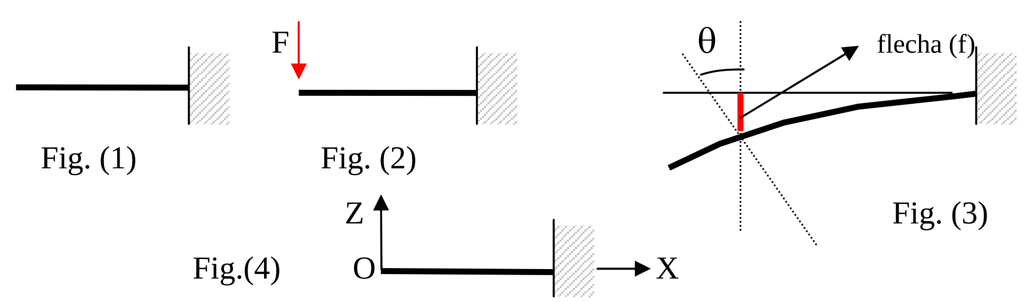
d) ¿Cuánto se gastó en salario y cuánto en combustible?

e) Si el chofer se acompaña con otra persona que cobra 2 U\$S/h , vuelve a resolver los items **c)** y **d)**.

Ejercicio No. 57 – Elástica de vigas – (Resol. Pag. 211)

La fig. (1) muestra una viga empotrada en su extremo derecho y libre en su extremo izquierdo.

En la fig. (2) la viga se somete a la acción de una fuerza (F) (carga aplicada en su extremo libre).



Bajo la acción de esa fuerza el eje de la viga se deforma. La curva , cuya forma adopta el eje de la viga , se denomina "**elástica de la viga**".

Adoptando un sistema de ejes (XOZ) como el indicado en Fig. (4), la curva responderá a una determinada ecuación que se conoce como "**Ecuación de la elástica**".

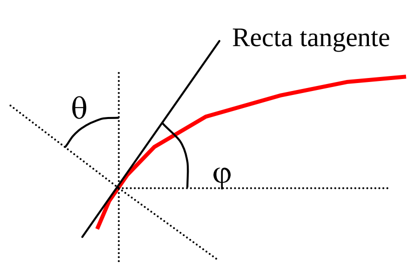
Los distintos puntos del eje de la viga sufren desplazamientos verticales llamados "flechas" **f** y las secciones perpendiculares al eje sufren "**desplazamientos angulares** θ ", como indica la Fig. (3).

El conocimiento de las flechas **f** así como del ángulo de desplazamiento θ, es de importancia fundamental al momento del dimensionado de vigas sometidas a solicitaciones (carga) conocidas.

En el sistema (XOZ) llamaremos Z(x) a la ecuación de la elástica y $\theta(x)$ al desplazamiento angular.

Se cumplirá en todos los casos que:

$$\theta(x) = \frac{dZ}{dx}$$



En efecto, observa que $tg\ \varphi = \frac{dZ}{dx}$, pero $\varphi = \theta$ (lados perpendiculares) $\Rightarrow$

$tg\ \theta = \frac{dZ}{dx}$ y como se trabaja con ángulos pequeños $tg\ \theta \cong \theta$

por lo cual : $\theta = \frac{dZ}{dx}$

Te propondremos ahora algunos ejercicios respecto del tema.

Considera la viga isostática empotrada en su extremo derecho, Fig. (1), sometida a una carga F en su extremo libre Fig. (2).

En el sistema de coordenadas (XOZ) de la figura (4) las ecuaciones de la elástica y el ángulo de desplazamiento son:

$$\begin{cases} Z(x) = -\dfrac{F.L^3}{6.EI}\left[2 - 3\left(\dfrac{x}{L}\right) + \left(\dfrac{x}{L}\right)^3\right] \\ \theta(x) = \dfrac{dZ}{dx} \end{cases}$$

$\theta > 0$ antihorario , $\theta < 0$ horario.

E e **I** son constantes que dependen del material y la forma de la sección recta de la viga.

a) Encuentra el punto de la viga donde se produce la flecha **máxima**, y el valor de f_{max}.

b) Encuentra el punto de la viga donde el desplazamiento angular es **máximo** y su correspondiente valor .

Ejercicio No. 58 – Viga apoyada con carga distribuída-(Resol. Pag.212)

Considera una viga isostática articulada en su extremo izquierdo A y apoyada en su extremo derecho B, como indica la figura, sometida a una carga uniforme de valor **p** Kg / m. Bajo esas condiciones se sabe que:

$$\begin{cases} Z(x) = -\dfrac{p.L^4}{24.EI}\left[\dfrac{x}{L} - 2\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 + \left(\dfrac{x}{L}\right)^4\right] & 0 \leq x \leq L \\ \theta(x) = \dfrac{dZ}{dx} \end{cases}$$

p (Kg / m)

A B

a) Encuentra el punto de la viga donde se produce la flecha **máxima**, así como el valor de la misma.

b) Encuentra el punto de la viga donde el desplazamiento es **máximo** y su correspondiente valor.

Ejercicio No. 59-Viga apoyada con carga concentrada–(Resol.Pag. 215)

Considera la viga de la figura, articulada en A y apoyada en B con una carga concentrada **F**.

Sea **L** su longitud.

F

A B

a b

En esas condiciones la ecuación de la elástica y el desplazamiento angular serán:

$$Z(x)\begin{cases} -\dfrac{F.a^2.b^2}{6.EIL}\left[2\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} - \dfrac{x^3}{a^2.b}\right] & \forall\ 0 \leq x \leq a \\ -\dfrac{F.a^2.b^2}{6.EIL}\left[2\dfrac{L-x}{b} + \dfrac{L-x}{a} - \dfrac{(L-x)^3}{a.b^2}\right] & \forall\ a < x \leq L \\ \theta(x) = \dfrac{dZ}{dx} \end{cases}$$

a) Demuestra que la función **Z** es contínua en el punto $x = a$

b)Tomando $a = (1/3)L$ encuentra el punto en que se produce la flecha **máxima** y el valor de ésta.

c) Calcula los ángulos θ en los extremos de la viga.

Ejercicio No. 60 - Análisis Marginal – (Resol. Pag.218)

El **análisis marginal** es la rama de la economía que estudia la variación de ciertas cantidades como precio, ingreso, costo y / o utilidad , cuando se presentan pequeños cambios en el nivel de producción.

Si **q** es el número de unidades producidas por un fabricante y **C** el costo total de producirlos, se define Costo Marginal $C_{mg.}$ como:

$$C_{mg.} = \frac{dC}{dq}$$

Si **I** es el ingreso total percibido por la venta de las **q** unidades se define Ingreso Marginal como:

$$I_{mg.} = \frac{dI}{dq}$$

a) Recordando que la utilidad o ganancia **G** es: $G(q) = I - C$

demuestra que la ganancia se **maximiza** para un nivel de producción $\mathbf{q_o}$ cuando se cumplen:

1ro.) $C_{mg.}(q_o) = I_{mg.}(q_o)$

2do.) $\frac{d^2I}{dq^2}(q_0) < \frac{d^2C}{dq^2}(q_0)$

b) Un fabricante estima que si produce **q** miles de unidades por mes de cierto artículo su Costo Total C viene expresado por la relación:

$C(q) = 0.10\,q^2 - 0.2\,q + 100$ U$S

Su curva de demanda responde a la expresión

$p\ (q) = -\ 0.11\ q + 41.8$ U$S / unidad.

Te pedimos que determines el nivel de producción **q** que **maximiza** las ganancias y el correspondiente precio por unidad.

Verifica que se cumplen las condiciones de la parte **a)** del ejercicio.

OPTIMIZACIÓN

RESOLUCIONES

Ejercicio No. 1

a) Llamemos **x** e **y** a las componentes de la pareja.

Se busca maximizar **P** tal que : $P = x\,.y$

Sabemos que se cumple la condición: $x + y = S$ (1)

De la condición (1): $y = S – x$.

Sustituyendo tendremos: $P(x) = x\,.\,(S – x)$

Finalmente entonces: $P(x) = -x^2 + S.x$

Nos encontramos con una simple función cuadrática que conoces de cursos anteriores. Busquemos su máximo , vértice de la parábola representativa de la función , para lo cual debemos anular su derivada .

Derivando: $\frac{dP}{dx} = -2.x + S$

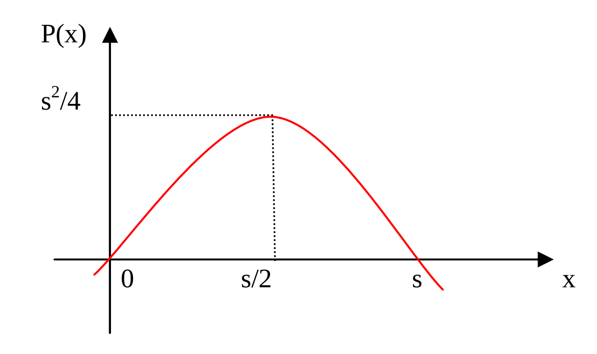
Anulando: $-2.x + S = 0$ Finalmente: $x = ½\,S$.

De la condición (1) : $y = ½.\,S$

La pareja buscada será entonces: $(½\,S,\ ½\,S)$

El producto de sus componentes será el valor **máximo**: $P(½\,S) = ¼\,S^2$

El bosquejo de la función producto es el indicado en la figura.



b) Si $S = 40$, la solución es: $x = 20$, $y = 20$ o sea la pareja (20, 20).

El producto máximo será entonces: $P_{max} = 400$.

Ejercicio No.2

a) Siendo (x , y) la pareja buscada deseamos en este caso minimizar la suma

$$S = x + y$$

cumpliéndose la condición :

$$x \,.\, y = P \qquad (1) \qquad \text{siendo P , dado.}$$

De la condición anterior se concluye que: $y = P/\ x$. Sustituyendo obtenemos finalmente:

$$S(x) = x + \frac{P}{x}$$

Busquemos los puntos críticos de la función anulando la derivada. Tendremos:

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{P}{x^2} = \frac{x^2 - P}{x^2} \Rightarrow x^2 - P = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{P}$$

Hemos descartado la solución negativa ya que $x > 0$.

Estudiando el signo de la derivada primera de la función o calculando la derivada segunda en el punto crítico podemos clasificarlo.

$$\text{Sig } \frac{dS}{dx} \quad \underset{0}{|} \quad - \quad \overset{0}{\underset{\sqrt{P}}{\uparrow}} \quad +$$

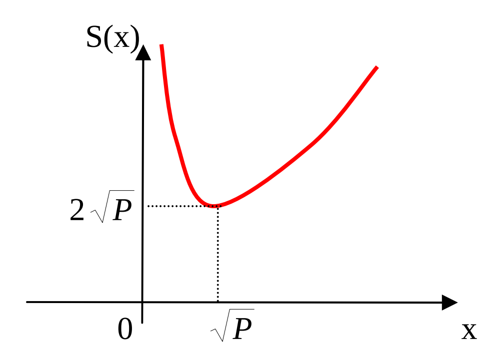
(decreciente antes de $\sqrt{P}$, creciente después)

El punto crítico corresponde entonces a un mínimo y su ordenada vale: $S(\sqrt{P}) = 2.\sqrt{P}$

Bosquejemos la función S : $S(x) = x + \frac{P}{x}$

Calculemos: $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = +\infty$

La gráfica de la función **S** tendrá el andamiento indicado en la figura.



La componente **y** de la pareja la obtenemos de la relación (1): $y = p/x = \sqrt{p}$

Finalmente entonces la pareja buscada es: $(\sqrt{P}, \sqrt{P})$ y su suma , $S = 2\sqrt{p}$

b) Siendo P = 100 la pareja será (10 , 10) y su suma S = 20.

Ejercicio No. 3

Llamemos **x** e **y** a los lados del rectángulo.

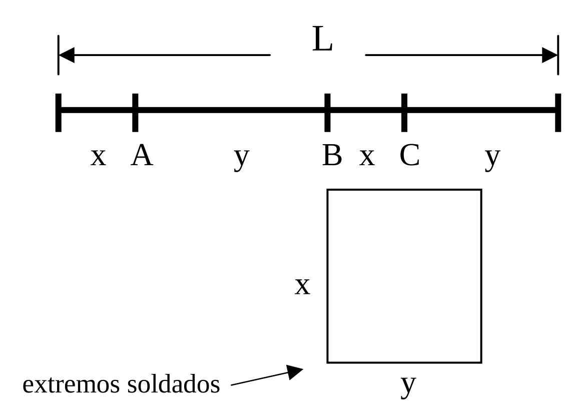
Su perímetro **p** será: $p = 2(x + y)$ (I) y su área **A**: $A = x \cdot y$

Observa que este ejercicio es una aplicación geométrica del ejercicio No. 1. En efecto, de la expresión (I): $x + y = p/2$ con $(p / 2)$ dado , y estamos buscando maximizar su producto (x .y). Si llamamos S al número (p / 2) estamos en las condiciones del ejercicio No.1

De acuerdo con los resultados allí obtenidos la solución será: $x = y = S / 2 = p / 4$, por lo que el rectángulo de área máxima es el CUADRADO.

El área máxima valdrá : $A_{max} = S^2 / 4 = p^2 / 16$.

Ejercicio No. 4



a) Los dobleces podrán efectuarse, por ejemplo, en los puntos A , B , C indicados debiendo ser B el punto medio del alambre.

b) Teóricamente podrás construir infinitos rectángulos variando **x** entre 0 y L / 2 , y sus áreas variarán.

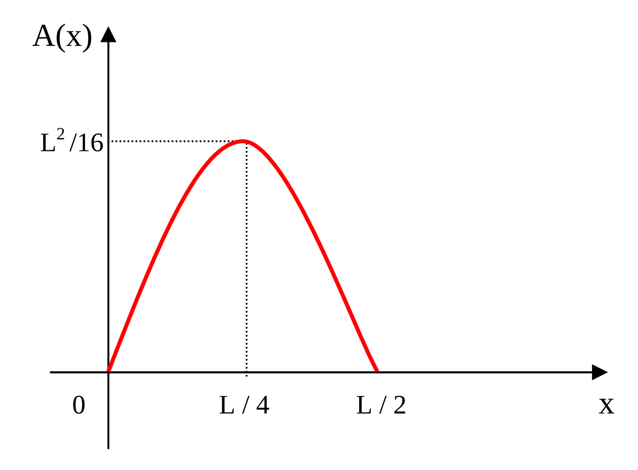
c) Se cumplirá que el área **A** será: A = x .y con la condición 2 (x + y) = L

Despejando **y** de la condición anterior y sustituyendo obtenemos:

$$\Rightarrow \qquad A(x) = x.\left(\frac{L}{2} - x\right) \qquad 0 < x < L/2$$

Observa que , como el perímetro **L** del rectángulo es dado , esto no es más que una aplicación del ejercicio No.3 y por tanto el rectángulo de área máxima será el cuadrado de lado $\frac{L}{4}$ y área $A = \frac{L^2}{16}$.

La función (A) es una función cuadrática con dominio restringido a [0 , L / 2] cuya gráfica representativa es la indicada.

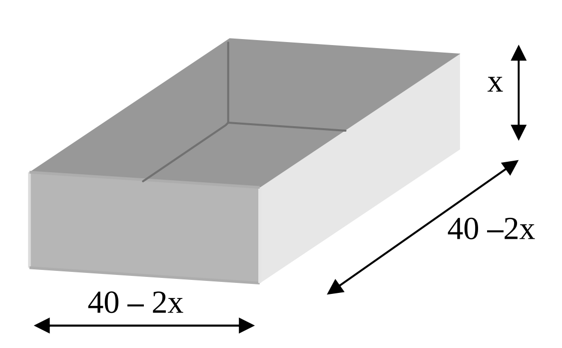


Ejercicio No. 5

Una vez armada , la caja tendrá como base un cuadrado de lado (40 – 2x) y altura (x) .

Su volumen estará dado por la expresión: $V(x) = (40 - 2x)^2 \cdot x$

.



Estudiaremos la función **V** en el intervalo [0 , 20] .

Valores en los extremos: V(0)=0 V(20)=0 . Busquemos puntos críticos.

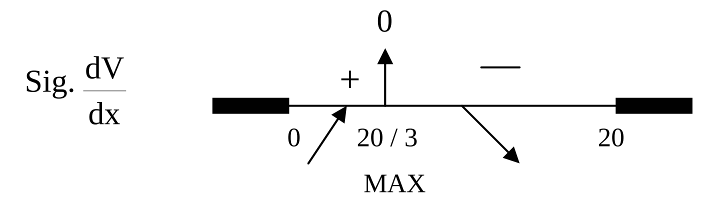
Derivando:

$$\frac{dV}{dx} = 2(40-2.x).(-2).x + (40-2x)^2 = (40-2.x)(-4x+40-2.x)$$

$$\text{Operando}: \frac{dV}{dx} = (40-2.x)(-6x+40)$$

$$\text{Anulando obtenemos como puntos críticos}: \quad x = 20 \ \text{ y } x = \frac{20}{3}$$

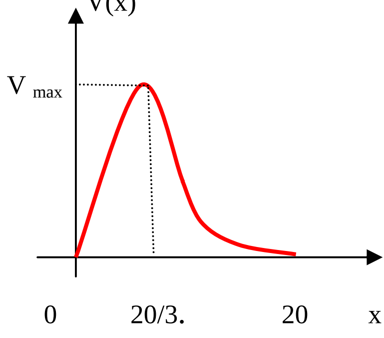
Para clasificar el punto crítico interior al intervalo [0,20] estudiemos el signo de la derivada primera.



El valor x = 20 / 3 corresponde a un máximo.

El bosquejo gráfico de la función **V** se indica

en la figura.



Observa que la curva tiene tangente horizontal en x= 20 ya que en ese valor la derivada es nula.

b) El correspondiente volumen **V** será:

$$V_{max} = V(\frac{20}{3}) = (4 - \frac{40}{3})^2 . \frac{20}{3} \cong 4{,}74.10^3 cm^3$$

Ejercicio No. 6

El costo de producción está dado por la expresión: $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - \frac{15}{2}q^2 + 36q + 81$

Como se te pide que minimices el costo de producción , derivaremos la función.

Tendremos:

$$\frac{dC}{dq} = q^2 - 15q + 36$$

Anulando para hallar puntos críticos :

$q^2 - 15q + 36 = 0 \Rightarrow \quad q_1 = 3 \quad q_2 = 12$

Estudiemos el signo de $\frac{dC}{dq}$ para clasificar los punto críticos hallados.

Sg $\frac{dC}{dq}$ + 0 — 0 +

0   3   12   15

max   min

Nos queda por definir si el mínimo absoluto es C(12) o C(0). Calculemos esos valores funcionales. C(0) = 81 C(12)=9

El **mínimo** costo de producción corresponde entonces a la fabricación 12000 unidades y su valor es de : $C_{min.}$ = U$S 9000.

Ejercicio No. 7

a) Siendo el costo total de los **n** pisos: $C(n) = 2n^2 + 300n + 320$ el costo promedio por piso será: $C_{med} = 2n + 300 + \frac{320}{n}$

b) Busquemos puntos críticos , siendo n > 0.

$$\frac{dC}{dn} = 2 - \frac{320}{n^2}$$

Anulando la derivada: $2n^2 - 320 = 0 \Rightarrow \; n = \sqrt{160} \cong 12,65$

Necesitamos clasificar el punto crítico hallado, para lo cual podemos estudiar el signo de la derivada primera o calcular la derivada segunda en el valor hallado de **n** . Optando por lo último:

$$\frac{d^2C}{dn^2} = \frac{640}{n^3} \Rightarrow \; \frac{d^2C}{dn^2}(\sqrt{160}) \cong 0,3 > 0$$

⟹ el punto crítico es un **mínimo**.

Como el número de pisos debe ser un número natural deberemos decidir entre 12 y 13 pisos , para lo cual calcularemos los costos correspondientes.

$C_{med}(12)$ = U$S 350666 C_{med} (13) = U$S 350615

En consecuencia el costo total será **mínimo** para n = 13 pisos.

c) El costo total del edificio será : C(13)= 350615. (13) ≅ U$S 4558000.

Ejercicio No. 8

a) Como : $\rho = \frac{m}{V}$, siendo **m** constante, la densidad ρ del agua será máxima cuando el volumen **V** sea mínimo. Debemos pues minimizar **V** en [0,10].

Derivando:

$$\frac{dV}{dT} = 10^{-5}(-20,4.10^{-3}T^2 + 0,17T - 6,4)$$

Anulando: $-20,4 . 10^{-3}T^2 + 0,17\,T - 6,4 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtienen como raíces :

$T_1 \cong 3,92^0C$ y $T_2 \cong 79^0C$

T_1 corresponde al único punto crítico en el intervalo considerado

Estudiemos el signo de la derivada para clasificarlo

Sig dV / dT — 0 ↑ +

0 ↘ 3.92 ↗ 10

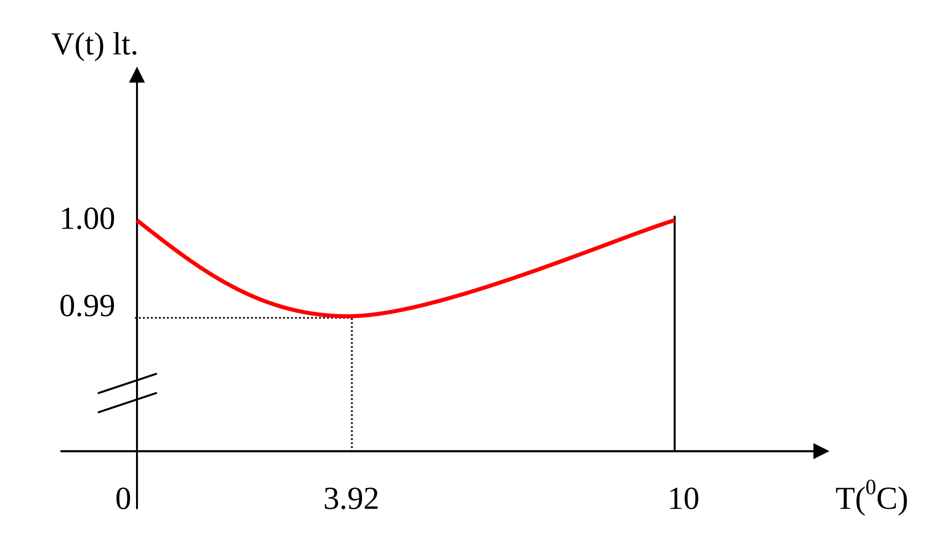
El valor de T hallado corresponde al mínimo absoluto de la función V en [0,10]. El agua tiene entonces densidad **máxima** a una temperatura cercana a los 4 grados centígrados.

b) Los valores en los extremos del intervalo son:

V(0)= 1 lt V(10)≅ 1 lt

El valor en T=3,92 es: V(3.92)≅ 0.99.

El bosquejo gráfico de la función es como se indica.



Ejercicio No. 9

a) La función demanda **p** es tal que : $p(q) = 8.25\, e^{-0.02\, q}$ con $q \geq 0$.

Bosquejaremos p(q) para lo cual calculamos:

$p(0) = 8{,}25 \qquad \lim_{q \to +\infty} p(q) = 0$

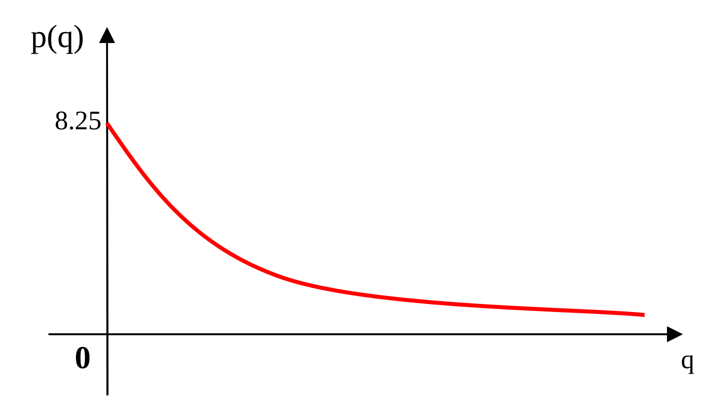
$$\frac{dp}{dq} = -\,8{,}25\,.(0.02).\,e^{-0{,}02\,q}$$

Obviamente la derivada es negativa para todo valor de **q ,** con lo que la función es monótona decreciente.

La derivada segunda será : $\dfrac{d^2p}{dq^2} = 8{,}25\,.(0{,}02)^2\,e^{-0{,}02\,q} \geq 0 \qquad \forall\ q \geq 0$

por lo que la concavidad será positiva.

La figura indica el bosquejo de la función demanda.



b) El ingreso total **I** es el producto de la cantidad demandada **q** por el precio por unidad **p** .

$$I(q) = p\,.\,q = 8{,}25\,q.\,e^{-\,0{,}02\,q}$$

Graficaremos la función en $[\,0\,,+\infty\,]$.

$I(0) = 0 \qquad \lim_{q \to +\infty} I(q) = \lim_{q \to +\infty} \dfrac{8.25q}{e^{0.02q}} = 0$ (órdenes de infinitos)

Puntos críticos.

$$\frac{dI}{dq} = 8.25[\, e^{-0.02\,q} + q\, e^{-0.02\,q}\,(-0.02)\,] = 8.25\, e^{-0.02\,q}\,(1 - 0.02q)$$

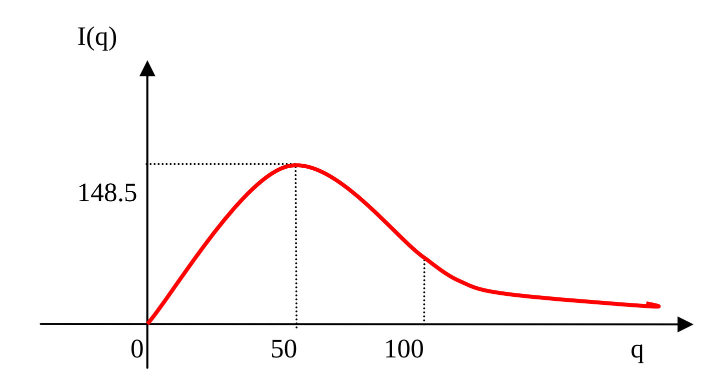
$$\frac{dI}{dq} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - 0.02\,q = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = 50$$

Siendo contínua $\frac{dI}{dq}$ $\forall\, q \geq 0$ con un solo punto crítico , y teniendo en cuenta los cálculos hechos anteriormente , podemos concluir que el punto crítico corresponde al máximo absoluto.

En consecuencia el nivel de demanda pedido es de: q = 50 unidades por mes.

El ingreso mensual correspondiente será entonces : I(50) = 148,5 miles de dólares o sea $I_{max.}$ = U$S 148500.

El bosquejo de la función **I** será el indicado en la figura.



Calcula $\frac{d^2I}{dq^2}$ y verifica que la función presenta un punto de inflexión en q = 100.

Ejercicio No. 10

a) La función de demanda de la empresa es : $p(q) = 3000 - 0.3q^2 - 0.6q$ (1).

Se trata de una simple función cuadrática con concavidad negativa.

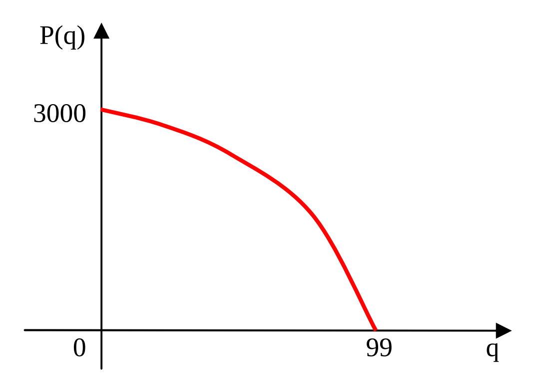
La representaremos para valores positivos de la demanda q .

p (0) = 3000 Raíces: $-0.3q - 0.6q + 3000 = 0$

Resolviendo la ecuación obtenemos la raíz positiva $q \cong 99$

El vértice de la parábola representativa corresponde al valor q = - 1 como fácilmente puedes verificar anulando la derivada de la función.

El bosquejo gráfico de la función demanda será pues el indicado en la figura.



b) i) Siendo el ingreso **I = p.q** y sustituyendo **p** por su expresión (1) obtenemos:

$$I(q) = (-0.3q^2 - 0.6q + 3000).q = -0.3\ q^3 - 0.6\ q^2 + 3000\ q$$

Estudiaremos la función en el intervalo [0, 99].

I(0) = 0 I(99) = 0 (recuerda que el valor aproximado q=99 correspondía a p=0).

Puntos críticos.

$$\frac{dI}{dq} = -\ 0.9\ q^2 - 1.2\ q + 3000 = 0 \Longrightarrow q \cong 57 \text{ toneladas}$$

Estudiemos el signo de la derivada primera de la función para justificar que el punto crítico corresponde a un máximo.

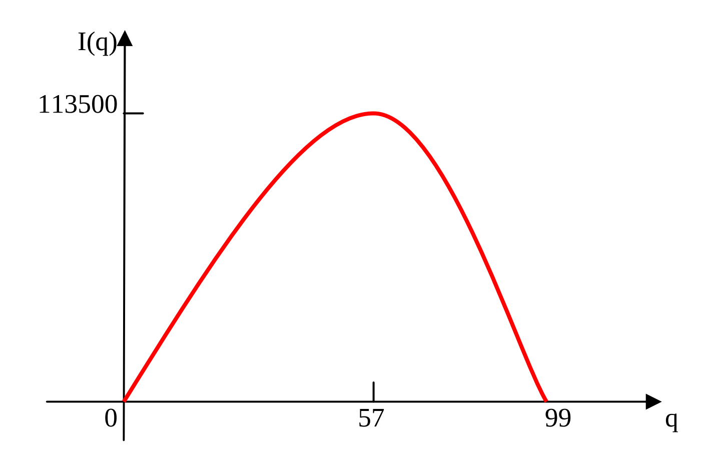
$Sg\ \frac{dI}{dq}$ + 0 —

0 57 99

ii) El ingreso máximo correspondiente será: $I_{max.} \cong$ U$S 113500.

iii) De la expresión (1) , el precio de venta : $p(57) \cong 1990$ U$S / ton.

c) El bosquejo de la función ingreso en el intervalo [0, 99] será el indicado.



Ejercicio No. 11

Llamando **R** a la resistencia de la viga y **k** una constante positiva de proporcionalidad podremos escribir:

$$R = k.\ a.\ h^2 \qquad (1)$$

Considerando el triángulo ABC tendremos :

$$\Phi^2 - a^2 = h^2 \qquad (2)$$

Sustituyendo en (1) obtenemos la expresión

analítica de la función **R**: $R(a) = k.\ a\ .\ (\Phi^2 - a^2) \qquad 0 \leq a \leq \Phi$

Bosquejaremos la función calculando: $R(0) = 0 \qquad R(\Phi) = 0$

<u>Puntos críticos</u>

$$\frac{dR}{da} = k.(\Phi^2 - 3a^2)$$

Anulando obtenemos: $a = \dfrac{\phi}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\phi \cong 0.577\,\phi$ (hemos desechado la solución negativa por no pertenecer al intervalo de estudio).

De la relación (2) concluímos que: $h = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\phi \cong 0.816\,\phi$

b) Si Φ = 15” ≅ 38 cm ⟹ a ≅ 8.65” ≅ 22 cm h ≅ 12,24” ≅ 31 cm.

c) El volumen del tronco cilíndrico de longitud L será: $V = \pi \cdot \dfrac{\phi^2}{4} \cdot L$

El volumen de la viga de longitud L será : $V_1 = a.h.L$

Tendremos entonces : $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{a.h.L}{\pi \dfrac{\phi^2 L}{4}} = \dfrac{4.a.h}{\pi\,\phi^2} \cong 0.6$

El porcentaje de madera utilizada en la viga es entonces del 60% de la madera total.

Ejercicio No. 12

Este ejercicio es similar al anterior. Si llamamos **E** a la rigidez de la viga y **k** a una constante positiva de proporcionalidad , la función **E** tendrá como expresión analítica: $E = k.\,a\,.\,h^3$ (1)

La relación entre a , h y Φ es la misma que en el ejercicio No.11 , vale decir:

$$h^2 = \Phi^2 - a^2 \qquad (2)$$

Podríamos intentar un razonamiento similar al del ejercicio anterior .

Despejando **h** de la relación (2) y sustituyendo en (1) obtendríamos para la función **E** la expresión analítica :

$$E = k.a.\left(\sqrt{\phi^2 - a^2}\right)^3$$

Los cálculos necesarios para hallar puntos críticos se vuelven en este caso más laboriosos por la expresión obtenida

Te mostraremos una manera alternativa de hallarlos.

Retomemos la expresión (1) : $E(a) = k.a.(h(a))^3$

Calculemos $\frac{dE}{da}$ utilizando el teorema de derivada de la función compuesta.

$$\frac{dE}{da} = k\,[\;h^3(a) + a.3h^2(a).\,\frac{dh}{da}\,] \qquad (3)$$

De la relación (2) , derivando ambos miembros obtenemos:

$$\frac{d^2h(a)}{da} = \frac{dh^2}{dh}\frac{dh}{da} \Longrightarrow 2h\frac{dh}{da} = -2a \Longrightarrow \frac{dh}{da} = -\frac{a}{h}$$

Sustituyendo en (3): $\frac{dE}{da} = k\,[\;h^3 + a.3h^2.\,\frac{(-a)}{h}\,] = k\,[\,h^3 - 3\,a^2\,h]$

Anulando la derivada para obtener puntos críticos concluímos que debe cumplirse la

relación: $h^3 - 3\,a^2\,h = 0 \Longrightarrow h = a\,.\sqrt{3}$

El resultado anterior y la relación (2) nos permiten expresar los valores de **a** y de **h** en función del diámetro ϕ del tronco:

$$a = \frac{\phi}{2} \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\phi \cong 0.866\,\phi$$

Un razonamiento similar al del ejercicio anterior permite afirmar que el punto crítico correspondiente al valor de **a** hallado es un máximo.

b) Para ϕ = 15” será: a = 7.5” ≅ 19 cm h ≅ 13” ≅ 33 cm .

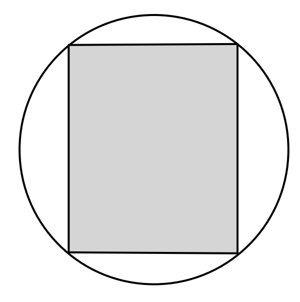
c) La relación de volúmenes calculada en el ejercicio No.11:

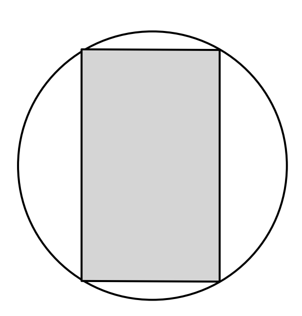
$$\frac{V_1}{V} = \frac{4.a.h}{\pi\phi^2}$$

nos da en este caso un valor aproximado de 0.55.

En consecuencia para obtener la viga de **máxima** rigidez se utiliza el **55%** de la madera total.

Las figuras siguientes muestran las secciones de las vigas de máxima resistencia y de máxima rigidez a efectos comparativos.





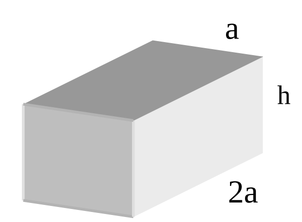

Viga de máxima. resistencia

Viga de máxima rigidez

Ejercicio No. 13

El costo necesario para la fabricación del tanque se compone del costo de la base más el costo de la superficie lateral .

$C_T = C_{base} + C_{sup.lat.}$



El costo del material de la base será:

$C_{base} = 100.Sup_{base} = 100 . 2\,a^2 = 200\,a^2$

Costo de la superficie lateral: $C_{lat.} = 80.\, S_{lat.} = 80.(6ah) = 480ah$

Finalmente entonces: $C_T = 200\, a^2 + 480\, a\, h$

Se exige que el volumen total sea de 45 m^3 o sea:

$V = a.2\, a.h = 2\, a^2\, h \Longrightarrow 2\, a^2\, h = 45 \quad (1)$

Despejando **h** de (1) y sustituyendo en la expresión del costo total obtenemos finalmente:

$$C_T\,(a) = 200\, a^2 + \frac{10800}{a} \qquad a > 0$$

Estudiemos la función en $(0 , +\infty)$.

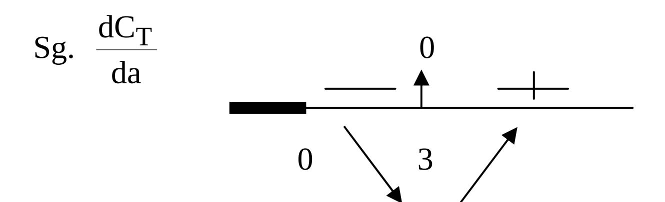
$\lim_{a \to 0^+} C_T\,(a) = +\infty \qquad \lim_{a \to +\infty} C_T\,(a) = +\infty$

Puntos críticos.

$$\frac{d\,C_T}{da} = 400\, a - \frac{10800}{a^2}$$

Anulando: $400\, a^3 - 10800 = 0 \Longrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{10800}{400}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Sg. $\frac{dC_T}{da}$



De acuerdo a los cálculos podemos afirmar que la función presenta un mínimo en a =3 .

De la expresión (1) se deduce que h = 2.5 m

Las dimensiones del tanque deberán ser entonces: a = 3m , h = 2.5m , L = 6m.

El costo total será de : $C_T\,(3) =$ \$ 5400 .

Ejercicio No. 14

Sea R el radio de la base y h la altura de la parte cilíndrica.

Tendremos: Sup. lateral = 2π R h Sup. bóveda = $2\pi R^2$

Costo de superficie lateral: **A** ($ / m^2)

Costo de bóveda : 2 **A** ($ / m^2)

Costo total: $C_T = 2\pi R h A + 2\pi R^2 .2 A$



Llamando **V** al volumen dado del silo expresado en m^3 tendremos:

$$V = \pi R^2 h + \frac{4\pi R^3}{6} \qquad (1)$$

Despejando **h** de (1), sustituyendo y operando en la expresión del costo obtenemos:

$$H = h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2} \quad \Longrightarrow \quad C_T(R) = 2\pi A\left(\frac{V}{\pi R} + \frac{4R^2}{3}\right)$$

Estudiaremos la existencia de mínimo en [0 , + ∞] .

Calculamos:

$$\lim_{R \to 0^+} C(R) = +\infty \qquad \lim_{R \to +\infty} C(R) = +\infty$$

Puntos críticos

Derivando: $\dfrac{dC_T}{dR} = 2A\pi \left(\dfrac{-V}{\pi R^2} + \dfrac{8R}{3} \right)$

Anulando: $-\dfrac{V}{\pi R^2} + \dfrac{8R}{3} = 0 \Longrightarrow -3V+8R^3 = 0$ Este polinomio en R de tercer grado tiene una raíz real , $R = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{8\pi}}$, y las dos restantes imaginarias.

Sg. $\dfrac{dC_T}{dR}$ — 0 ↑ +

0 ↘ $\sqrt[3]{\dfrac{3V}{8\pi}}$ ↗

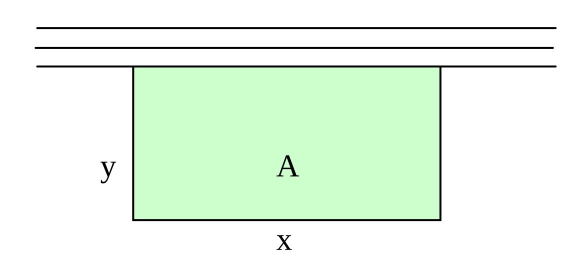
El valor hallado de R corresponde por tanto a un mínimo.

Como $\phi = 2R$ tendremos: $\phi = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$

De la expresión (1) :

$$h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2} = \frac{V - \frac{2}{3}\pi \frac{3V}{8\pi}}{\pi \sqrt[3]{\frac{9V^2}{64\pi^2}}} = \sqrt[3]{3V}$$

Ejercicio No. 15



Como el costo del alambre es proporcional a la longitud y los cinco tiros son iguales , bastará minimizar el costo de uno de ellos.

Llamemos **L** a su longitud expresada en (m) y **A** el área encerrada en (m^2) .

Tendremos: $L = x + 2y$ y deberá cumplirse la condición $x.y = A$ (1)

Despejando **y** de (1) y sustituyendo obtenemos finalmente la función **L**.

$$L(x) = x + \frac{A}{x} \qquad x \geq 0$$

Derivando para hallar puntos críticos:

$$\frac{dL}{dx} = 1 - \frac{2A}{x^2} = \frac{x^2 - 2A}{x^2}$$

Obtenemos entonces: $x = \sqrt{2A}$

Sg. $\frac{dL}{dx}$ — 0 +

0 ↘ $\sqrt{2A}$ ↗

La función presenta mínimo en el valor hallado de **x** .

El correspondiente valor de y deducido de la expresión (1) será :

$$y = \frac{A}{\sqrt{2A}} = \frac{\sqrt{2A}}{2}$$

El ancho del rectángulo a alambrar es entonces la mitad del largo.

Siendo 1Hec. = 10000 m^2 obtenemos:

$$x \cong 447{,}20 \text{ m} \qquad y \cong 223{,}60 \text{ m} \qquad L = 894{,}40 \text{ m}$$

Como el alambrado tenía 5 hilos , la longitud total de alambre será:

$$L_{total} = 4472 \text{ m}$$

y el costo total de alambre asciende a la suma de U$S 156,52 .

Si deseas tener un costo más ajustado al costo del trabajo de alambramiento deberás agregar el costo de los postes , el de los piques , el salario de los alambradores y estimar además un porcentaje de alambre para ataduras y de desperdicio .

Ejercicio No. 16

a) La función ganancia **G** es tal que :

$$G(x) = 2000\,x - 2\,x^2$$

Se trata de una simple función cuadrática cuya parábola representativa tiene concavidad negativa.

Bastará que hallemos la abscisa de su vértice y si este es interior al intervalo de estudio, [0 , 600] , corresponderá al máximo absoluto de la función.

Derivado y anulando la derivada obtenemos:

$$\frac{dG}{dx} = -4x + 2000 \quad \Longrightarrow \quad x = 500$$

En consecuencia el productor deberá sembrar 500 Hec.

b) La ganancia máxima por sembrar 500 Hec. será: G(500) = $ 500.000

De haber sembrado las 600 Hectáreas disponibles su ganancia habría sido de G(600) = $ 480000 .

En consecuencia su pérdida hubiera sido de $ 20000 .

Ejercicio No. 17

a)

d

Q_1 **Q_2**

x **P** d-x

El potencial en un punto P como el indicado será:

$$V(x) = \frac{kQ_1}{x} + \frac{kQ_2}{d-x}$$

Siendo $Q_2 = 5\,Q_1$ nos quedará finalmente como expresión analítica de la función V:

$$V(x) = kQ_1\left(\frac{1}{x} + \frac{5}{d-x}\right)$$

b) Estudiemos la función **V** en el intervalo (0 , d)

$$\lim_{x \to 0^+} V(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = +\infty$$

<u>Puntos críticos</u>

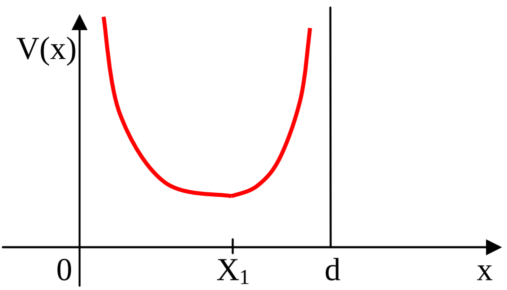
$$\frac{dV}{dx} = kQ_1\left[\frac{-1}{x^2} + \frac{5}{(d-x)^2}\right] = kQ_1\left[\frac{4x^2 + 2dx - d^2}{x^2(d-x)^2}\right]$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 + 2dx - d^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación: $X_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)d \qquad X_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)d$

Descartamos la solución X_2 por ser negativa , mientras $X_1 \in (0, d)$, $X_1 < d$.

El bosquejo gráfico de la función es el indicado en la figura



El voltaje mínimo se produce entonces cuando el punto P está a una distancia X_1 de la carga Q_1 y su valor será $V(x_1)$.

c) Para los valores dados: $Q_1 = 5 \ . \ 10^{-10}$ Cul. , $Q_2 = 5\ Q_1$ $\quad d = 5$ cm. $= 0.05$ m $k = 9.10^9$ Volt. m / Cul. , $x \cong 0.62$ d , obtendremos:

$$V_{min.} = V\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.0{,}05\right) \cong V(0.03) \cong 1275 \text{ voltios.}$$

Ejercicio No. 18

a)

L

I_1 ——————— I_2

x P y

La iluminación E en el punto P será:

$$E = \frac{kI_1}{x^2} + \frac{kI_2}{y^2} = k\left(\frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{y^2}\right)$$

Se cumplirá además la condición $x + y = L$ de la que deducimos : $y = L - x$ (1)

Podríamos, como hicimos en el ejercicio anterior, sustituir el valor de y de (1) en la expresión de **E** obteniendo E(x).

La derivación de esta expresión nos conducirá a cálculos más laboriosos que los del ejercicio No. 17, por lo que resulta más conveniente resolver el problema de la derivación usando función compuesta.

Se cumple que:

$$\lim_{x \to 0^+} E(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to L^-} E(x) = +\infty$$

$$\frac{dE}{dx} = k\left(\frac{-2I_1}{x^3} + \frac{-2I_2}{y^3}\frac{dy}{dx}\right)$$

De la relación (1) : $\dfrac{dy}{dx} = -1$

En consecuencia: $\dfrac{dE}{dx} = 2k\left(\dfrac{-I_1}{x^3} + \dfrac{I_2}{y^3}\right)$

Anulando: $\dfrac{dE}{dx} = 0 \implies \left(\dfrac{-I_1}{x^3} + \dfrac{I_2}{y^3}\right) = 0 \implies x^3 = \dfrac{I_2}{I_1} y^3$

Finalmente: $x = \sqrt[3]{\dfrac{I_2}{I_1}} \; . \; y = \sqrt[3]{\dfrac{I_2}{I_1}} \; .(L - x)$

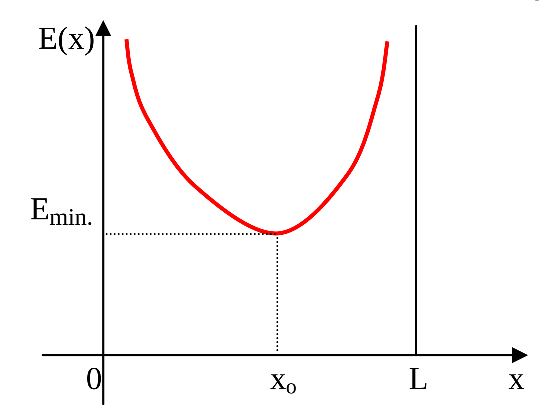
Operando en el segundo miembro de la igualdad y despejando x:

$$x = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{I_2}{I_1}}}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{I_2}{I_1}}} . L$$

Como $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{I_2}{I_1}}}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{I_2}{I_1}}} . < 1$ el valor de x hallado pertenece al intervalo (0 , L) de estudio de la función.

De acuerdo a los resultados obtenidos el punto crítico encontrado corresponde a un mínimo.

El bosquejo gráfico de la función será el indicado en la figura.



b) Siendo L = 12 m $I_2 = 8\, I_1$ tendremos: $x_o = 8$ m

Ejercicio No.19

a)

precio unitario: $p(x) = 200 - 0.01x$ $

Costo total: $C(x) = 50x + 20000$ $

La ganancia G del fabricante será :

G = I – C (Ganancia = Ingreso – Costo)

El ingreso obtenido por la venta de **x** artículos por semana se obtiene multiplicando el precio unitario **p** por el número de artículos vendidos semanalmente **x .**

⟹ $I(x) = p.x = 200x - 0.01x^2$ $ / sem

Finalmente entonces: $G(x) = (200x - 0{,}01x^2) - (50x + 20000)$

$$\mathbf{G(x) = - 0{,}01x^2 + 150x - 20000} \quad \$ / sem \qquad x \geq 0$$

Como puedes observar la función ganancia es una simple función cuadrática con concavidad negativa. Basta que verifiquemos que el vértice corresponde al máximo de la función en el intervalo [0 , + ∞) para lo cual su abscisa deberá ser ≥ 0.

Derivando: $\frac{dG}{dx} = -0.02x + 150$

Anulando: ⟹ $x = 7500$ unidades / sem.

En consecuencia para maximizar sus ganancias el fabricante deberá vender 7500 unidades / sem.

El precio correspondiente será: $p(7500) = 200 - 0{,}01.(7500) = 125$

p = 125 $ / unidad

b)

Al establecerse un impuesto de 10 $ / unidad tendremos una nueva función ganancia G_1 tal que $G_1(x) = - 0{,}01x^2 + 150x - 20000 - 10x$

$$\mathbf{G_1(x) = - 0{,}01x^2 + 140x - 20000}$$

Repitiendo para esta función lo hecho en la parte **a)** del ejercicio:

$$\frac{dG_1}{dx} = -0.02x + 140$$

Anulando ⟹ $x = 7000$ unidades / sem.

El nuevo precio será: $p(7000) = 200 - 0.01.(7000) = 130$

p = 130 $ /unidad

El precio de venta ha aumentado \$ 5.00 lo que te está indicando que para obtener máxima ganancia el fabricante trasmite al comprador la mitad del impuesto, absorbiendo él , la otra mitad.

Las respectivas ganancias serán:

$G(7500) = -\,0.01\,(7500)^2 + 150\,(7500) - 20000 =$ **542500** \$ / sem.

$G_1(7000) = -\,0.01\,(7000)^2 + 140\,(7000) - 20000 =$ **540000** \$ / sem.

Ejercicio No. 20

Debemos minimizar la función costo total C_T en el intervalo [0 , 300] .

$$C_T\,(x) = 2x + \frac{217800}{x}$$

Bosquejemos la gráfica de la función.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(2x + \frac{217800}{x} \right) = +\infty \qquad\qquad C_T\,(300) = 1326$$

<u>Puntos críticos</u>

$$\frac{dC_T}{dx} = 2 - \frac{217800}{x^2} = \frac{2x^2 - 217800}{x^2}$$

Anulando: $2x^2 - 217800 = 0 \Longrightarrow x = \pm\, 330$

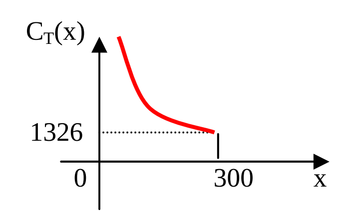
Sig. $\frac{dC_T}{dx}$: + (0 en -330) — (0) — (300) ... (0 en 330) +

-330   0   300   330

En el intervalo [0 , 300] que es el que nos interesa , la función resulta estrictamente decreciente y el **mínimo** absoluto que buscamos ocurre para x = 300.

En consecuencia deberán transportarse **300** unidades.

El bosquejo de la función es el indicado en la figura.



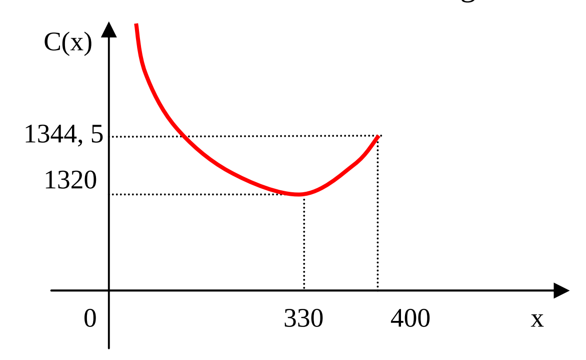
b) En este caso el intervalo de estudio será [0 , 400] .

Bajo estas condiciones el punto crítico correspondiente a $x = 330$ pertenece al intervalo y por tanto corresponderá al **mínimo** de la función según el estudio de signos hecho en la parte anterior.

Deberán transportarse entonces , en este caso , 330 unidades para obtener costo mínimo.

Ese costo será de : $C_T(330) = 1320$.

El bosquejo gráfico de la función se indica en la figura.



Ejercicio No. 21

$$P(R) = \frac{R\varepsilon^2}{(R+r)^2}$$

a) Para que la potencia disipada en la resistencia de carga sea máxima debemos hallar el máximo de P(R) en el intervalo [0 , +∞).

b) $P(0) = 0$ $\qquad \lim_{R \to +\infty} P(R) = 0$

Puntos críticos

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \left[\frac{(R+r)^2 - R.2(R+r)}{(R+r)^4} \right] = \varepsilon^2 \frac{\left(-R^2 + r^2\right)}{(R+r)^4}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -R^2 + r^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R = r}$$

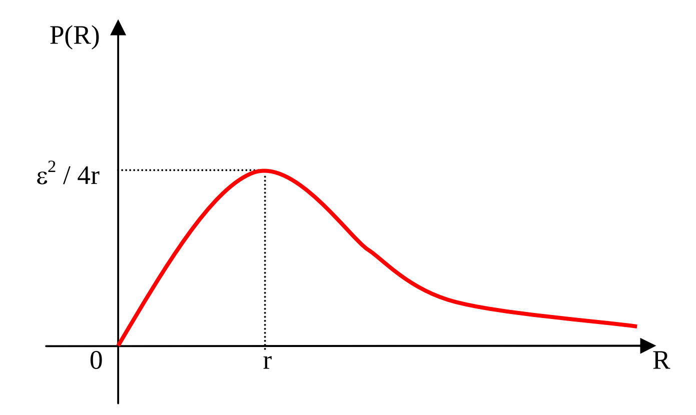
Como la función **P** es contínua y positiva en el intervalo , de acuerdo a los cálculos realizados podemos afirmar que el punto crítico es máximo.

En conclusión: **“ La potencia disipada en la resistencia de carga es máxima cuando ella iguala a la resistencia interna del generador”**

b) Con los cálculos realizados en la parte anterior podemos bosquejar el gráfico de la función **P**.

El valor de la potencia máxima es:

$$P_{max.} = \frac{\varepsilon^2}{4R}$$



<u>Nota</u>

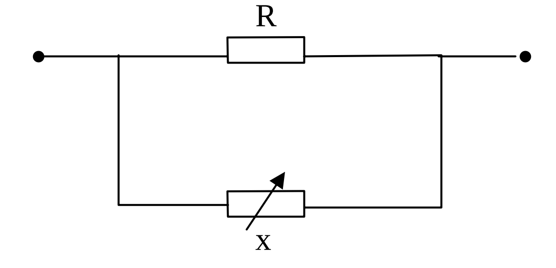
La expresión de la potencia disipada que te hemos dado en el enunciado del ejercicio puedes deducirla fácilmente .

La intensidad **I** de la corriente que circula por el circuito dado, es el cociente entre la fuerza electromotriz **ε** del generador y la resistencia total del circuito **R + r**.

Como la potencia disipada es : $P = R.I^2$ obtienes finalmente la expresión

$$P = \frac{R.\varepsilon^2}{(R+r)^2} .$$

Ejercicio No.22



a) Se cumple que:

$$\frac{1}{R_{eq.}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad R_{eq.} = \frac{R.x}{x+R} \quad (1)$$

b) Bosquejaremos la gráfica de $R_{eq.}$ en el intervalo $[0,+\infty)$.

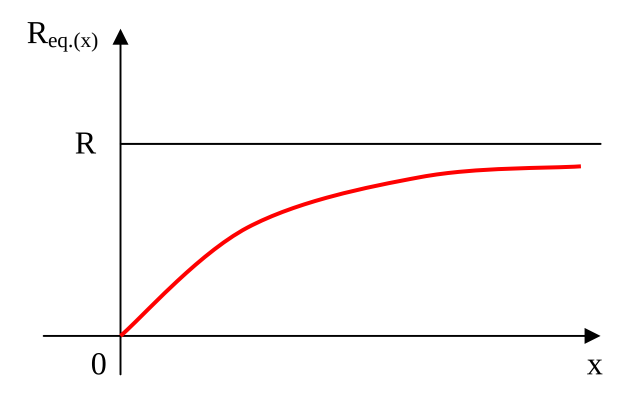
$$\lim_{x \to 0^+} R_{eq.} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} R_{eq.} = R$$

Derivando:

$$\frac{dR_{eq.}}{dx} = R\left[\frac{x+R-x}{(x+R)^2}\right] = \frac{R^2}{(x+R)^2}$$

Sg. $\frac{dR_{eq.}}{dx}$ 0   +   ↗

En consecuencia la función es monótona creciente y su gráfico es el indicado en la figura.



La $R_{eq.}$ del paralelo no supera entonces el valor R cualquiera sea el valor de la resistencia **x** .

c) Si $0 \leq x \leq R$ tendremos como valor máximo de la resistencia equivalente a :

$$R_{eq.\,max.} = R_{eq.}(R) = \frac{R}{2}$$

i) Si x = 0 , de la expresión (1) (parte **a)**) se concluye que : $R_{eq.}=0$ lo cual implica , desde el punto de vista eléctrico , cortocircuitar la resistencia **x** y por tanto la resistencia R . El circuito correspondiente será el de la fig.(1).

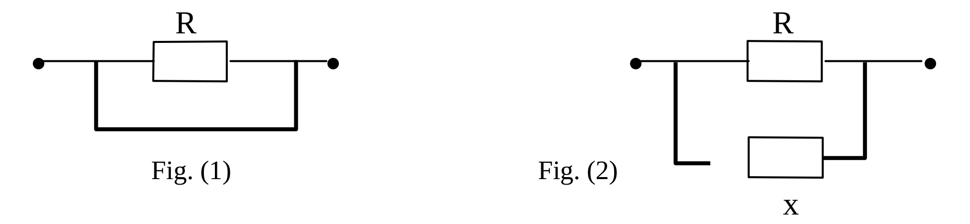
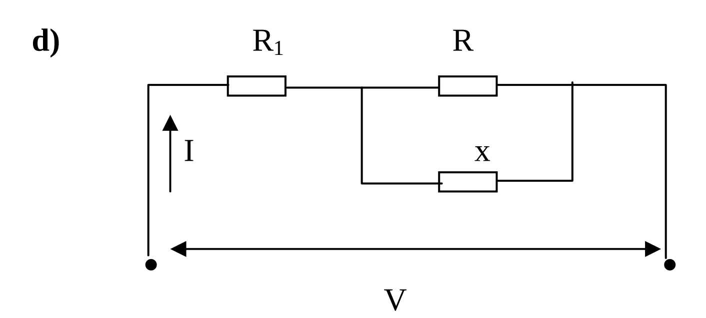


Fig. (1)   Fig. (2)

ii) Si $x \to +\infty$ de (1): $R_{eq.}= R$ Eléctricamente significa desconectar la resistencia **x** del paralelo. El circuito se ve en fig.(2).

d)



El valor de la intensidad de corriente **I** en el circuito viene dado por :

$$I = \frac{V}{R_1 + R_{eq.}}$$

Siendo $R_{eq.}$ la resistencia equivalente del paralelo formado por **R** y **x**.

Como $R_{eq.} = \frac{x.R}{x+R}$ obtenemos finalmente la expresión analítica de la función **I**.

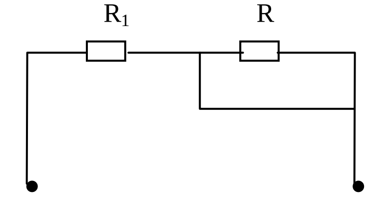
$$I(x) = \frac{V}{R_1 + \frac{xR}{x+R}} \qquad (2)$$

Para $x = 0$ tendremos, usando la expresión (2) : $I(0) = \frac{V}{R_1}$

Según vimos anteriormente el segundo sumando del denominador de (2) es una función monótona creciente por lo que también lo será la totalidad del denominador; y consecuentemente la función **I** es **monótona decreciente.**

Su valor máximo será precisamente I(0) lo cual nos permite afirmar que la resistencia R_1 actúa como limitadora de la corriente máxima del circuito en caso de cortocircuitarse la resistencia **x** .

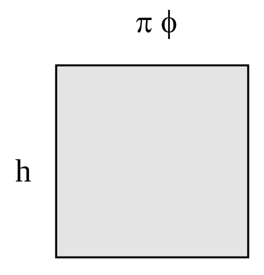
El circuito en el caso x =0 sería el indicado en la figura.

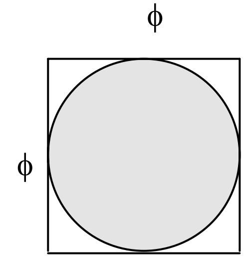


En el caso $x = 0$, $R_1 = 0$ la corriente máxima tiende a ∞ .

Ejercicio No.23

a) La superficie total de hojalata utilizada en el envase será la suma de la superficie lateral del cilindro más el doble de la superficie de un cuadrado de lado ϕ .





La superficie total **S** será entonces : $S = \pi.\phi.h + 2\phi^2$ (1)

El volumen dado **V** establece una relación entre las variables **ϕ** y **h.**

$$V = \frac{\pi\phi^2}{4}.h \qquad (2)$$

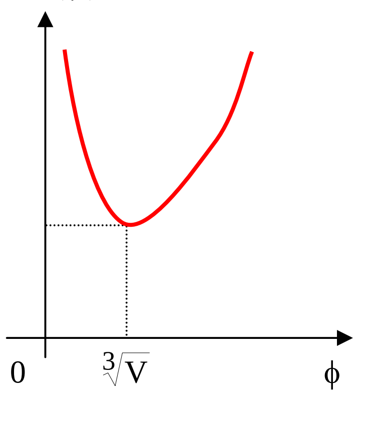
Despejando **h** de (2) y sustituyendo en (1) obtenemos finalmente:

$$S(\phi) = \frac{4V}{\phi} + 2\phi^2 \qquad \phi > 0$$

A efectos que visualices como varía la función **S** bosquejaremos el gráfico de ella.

$\lim_{\phi \to 0^+} S(\phi) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{\phi \to +\infty} S(\phi) = +\infty$

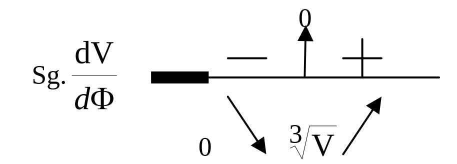
S (ϕ)



Puntos críticos

Derivando: $\frac{dS}{d\Phi} = -\frac{4V}{\Phi^2} + 4\Phi = 4\left(-\frac{V}{\Phi^2} + \Phi\right)$

Anulando: $\frac{-V}{\Phi^2} + \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \sqrt[3]{V}$



El punto crítico resulta ser entonces el mínimo absoluto de la función.

De la relación (2) : $h = \frac{4V}{\pi\Phi^2} = \frac{4V}{\pi\sqrt[3]{V^2}}$

La relación $\frac{h}{\phi}$ será entonces: $\frac{h}{\Phi} = \frac{4V}{\pi\sqrt[3]{V^2}\sqrt[3]{V}} = \frac{4}{\pi} \cong 1.27$

b) Si $V = 1\ lt = 1000\ cm^3$ $\Longrightarrow$ $\phi = 10\ cm \quad h = \frac{40}{\pi} \cong 12.7\ cm$

c) El área de material desperdiciado es el doble de la diferencia entre el área del cuadrado de lado ϕ y el área del círculo de diámetro ϕ .

La superficie total utilizada en el envase tiene área: $S = \dfrac{4V}{\phi} + 2\phi^2$

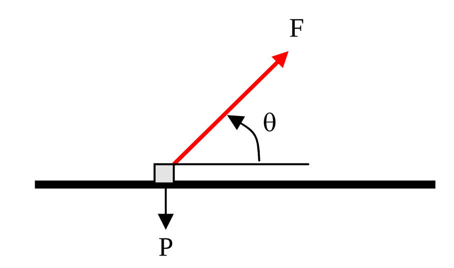
La relación entre área desperdiciada y área total será entonces:

$$\frac{2\,(\Phi^2 - \dfrac{\pi\Phi^2}{4})}{\dfrac{4V}{\Phi} + 2\Phi^2} = \frac{2(1-\dfrac{\pi}{4})}{\dfrac{4V}{\Phi^3} + 2} = 2\frac{(1-\dfrac{\pi}{4})}{6} \cong 0.072$$

(Recuerda que $\Phi = \sqrt[3]{V}$)

El porcentaje pedido será de **7,2** %.

Ejercicio No. 24



$$F(\theta) = \frac{\mu.m.g}{\cos\theta + \mu.\text{sen}\theta} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

a) Efectuemos un bosquejo gráfico de la función .

$F(0) = \mu.m.g$ $\qquad F(\dfrac{\pi}{2}) = m.g$

Puntos críticos

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{\mu.m.g\left[-\left(-\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta\right)\right]}{\left(\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta\right)^2}$$

Anulando: $\text{sen}\,\theta = \mu \cos\theta$ $\Longrightarrow$ $\text{tg}\,\theta = \mu$ $\Longrightarrow$ $\theta = \text{Arctg}\,\mu$

Estudiemos el signo de la derivada para clasificar el punto crítico.

El signo lo determina el factor $\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta = \cos\theta.\,(\text{tg}\theta - \mu)$

En $[\,0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\,]$, $\cos\theta \ge 0$ mientras el factor ($\text{tg}\,\theta - \mu$) cambia su signo de negativo a positivo.

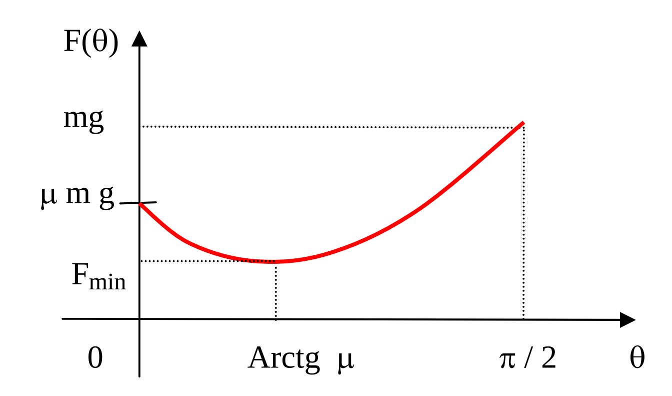
En definitiva:

Sg $\frac{dF}{d\theta}$ —   0   +

0 ↘ Arctg μ ↗ π /2

El punto crítico corresponde entonces al mínimo absoluto de la función.

El bosquejo gráfico será el indicado en la figura.



El valor de la fuerza **mínima** será:

$F_{min.} = \dfrac{\mu.m.g}{\cos\theta + \mu.\text{sen}\theta}$ debiéndose cumplir que tg θ =μ . Teniendo en cuenta que

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}}$ concluímos:

$$F_{min.} = \frac{\mu.m.g}{\cos\theta + \mu.\text{sen}\theta} = \frac{\mu.m.g}{\cos\theta.(1+\mu.\text{tg}\theta)} = \frac{\mu.m.g}{\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\left(1+\mu^2\right)} = \frac{\mu.m.g}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

b) Para el caso: μ = 0.4 , m = 80 Kg , g = 9.8 m / s^2 obtenemos:

$F_{min.} \cong 291{,}17$ Nw $\cong$ 30 Kg_f (kilogramo fuerza)

$\theta = \text{Arctg } 0.4 \cong 22^0$

<u>Comentario</u>.

En la parte **b)** del ejercicio has visto que si realizas una fuerza de aproximadamente

30 kg_f con un ángulo de inclinación de 22^0 , logras poner en movimiento el cuerpo cuyo peso es de 80 Kg_f .

Sin embargo, si realizas esa misma fuerza de 30 Kg_f horizontalmente ($\theta = 0^0$) **no** consigues moverlo ya que en ese caso la fuerza necesaria sería:

$F(0) = \mu.m.g = 0.4\ (80)(9.8)=313.6$ Nw = 32 Kg_f .

En realidad la fuerza útil F_u necesaria para mover el cuerpo es la componente horizontal de la fuerza F.

Para el caso $\theta = 22^0$ el módulo de la fuerza útil será $F_u = 30.\cos 22^0 = 27.8$ Kg_f .

En resumen

Si $F_u = 27.8$ Kg_f el cuerpo comienza a moverse.

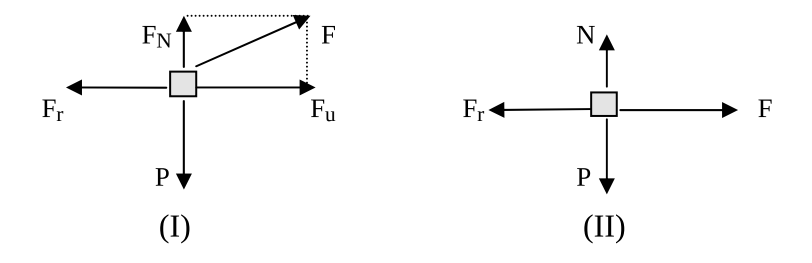
Si F = 30 Kg_f con dirección horizontal , el cuerpo no se mueve.

En primera instancia puede parecer un contrasentido.

Sin embargo no lo es , y los resultados que obtuviste son correctos.

¿ Que ocurre en realidad ?.

Si dibujas el diagrama del cuerpo libre tendrás todas las fuerzas que actúan en el problema .



En (I): $F_{roz} = \mu\ (P - F_N)$ En (II): $F_{roz} = \mu\ N_2 = \mu\ P$

Al variar el ángulo θ varían las componentes $F_{\mathbf{u}}$ **y** F_N de la fuerza F

Si θ aumenta desde 0^0 a 90^0, $F_{\mathbf{u}}$ disminuye y F_N aumenta , con lo cual disminuye la fuerza N de reacción del plano y consiguientemente disminuye la fuerza de rozamiento F_r.

La fuerza de rozamiento es máxima para $\theta = 0$ y vale:

$$F_{roz}(0) = 0.4.(80).(9.8) = 313.6 \text{ Nw} = 32 \text{ Kg}_f$$

Para $= 22^0$ en cambio la fuerza de rozamiento vale:

$F_N = 30.\text{sen}(22^0) \cong 11.24 \text{ Kg}_f$ $P = 80 \text{ Kg}_f$ $N \cong 68.76 \text{ Kg}_f$ por lo que $F_{roz}(22^0) = .4\,(68.76) \cong 27{,}50 \text{ Kg}_f$

En resumen:

En el caso (I):

$F = 30 \text{ Kg}_f$ $\theta = 0^0$ $F_{roz} = 32 \text{ Kg}_f$ $\Longrightarrow$ $F < F_{roz}$ (El cuerpo no se mueve)

En el caso (II):

$F = 30 \text{ Kg}_f$ $\theta = 22^0$ $F_u = 27.8 \text{ Kg}_f$ $F_{roz} = 27.50 \text{ Kg}_f$ $\Longrightarrow$ $F_u > F_{roz}$

(El cuerpo se mueve)

En consecuencia la aparente contradicción no es tal ya a la luz de que la fuerza de rozamiento disminuye a medida que aumenta el ángulo θ.

Ejercicio No. 25

Al aplicarle al cuerpo una fuerza de variación sinusoidal de frecuencia ω, la amplitud de la oscilación viene expresada por :

$$A(\omega) = \frac{c_1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + c_2\omega^2}}$$

Se te pide que encuentres el valor de **ω** que maximiza la función amplitud A, siendo $\omega \geq 0$, valor de **ω** que se denomina “frecuencia de resonancia”.

Podríamos repetir razonamientos de ejercicios anteriores derivando la función A buscando puntos críticos , etc.

Sin embargo , si observas la expresión analítica de la función ,veras que se trata de un cociente con numerador constante , por lo cual para maximizarlo bastará minimizar el denominador.

A su vez, para minimizar el denominador alcanza con minimizar la cantidad subradical dada la monotonía de la función raíz cuadrada.

Esta cantidad subradical no es más que una función cuadrática en ω , de concavidad positiva de la cual hallaremos la abscisa del vértice de la parábola representativa.

Tendremos entonces:

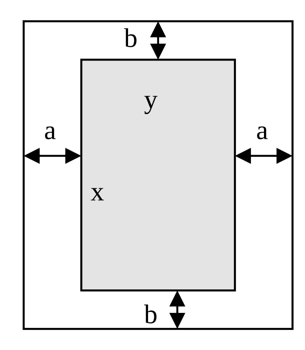
$$\frac{d\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+c_2\omega^2\right]}{d\omega}=2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left(-2\omega\right)+2c_2\omega=2\omega\left(-2\omega_0^2+2\omega^2+c_2\right)$$

Anulando: $\omega^2=\omega_0^2-\frac{c_2}{2} \qquad \Rightarrow \omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{c_2}{2}}$

La amplitud máxima de la oscilación será:

$$A_{max.}=\frac{c_1}{\sqrt{\frac{c_2^2}{4}-\frac{c_2^2}{2}+c_2\omega_0^2}}=\frac{c_1}{\sqrt{c_2\left(\omega_0^2-\frac{c_2}{4}\right)}}$$

Ejercicio No. 26



Llamemos **x** e **y** a los lados del rectángulo de estiba de área **A** y **a** y **b** a los espesores de las paredes.

Los lados del rectángulo exterior serán entonces (x + 2 a) e (y + 2b) y su área S valdrá:

S = (x + 2 a) (y + 2 b) (1)

Las variables **x** e **y** están ligadas por la relación: x.y = A (2)

De (2) : $y=\frac{A}{x}$

Sustituyendo en (1) obtenemos finalmente la expresión analítica de la función S :

$$S(x)=(x+2a)\left(\frac{A}{x}+2b\right) \qquad x>0$$

Bosquejemos el gráfico de la función S en (0 , +∞).

$\lim_{x \to 0^+} S(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$

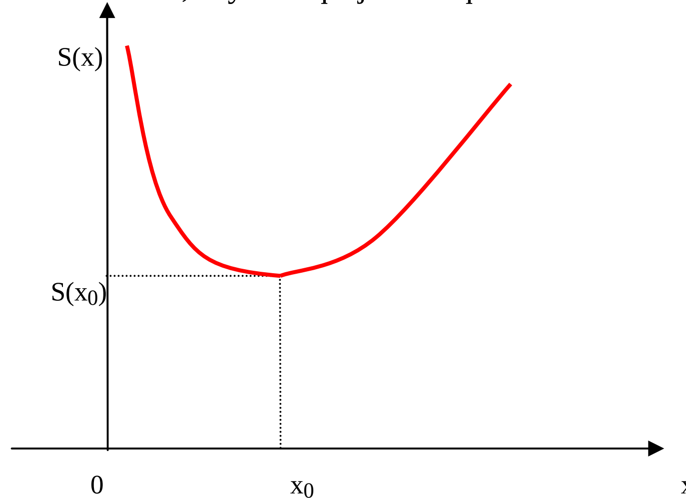
<u>Puntos críticos</u>

$$\frac{dS}{dx} = \left(\frac{A}{x} + 2b\right) + (x + 2a)\left(-\frac{A}{x^2}\right) = \frac{2bx^2 - 2aA}{x^2}$$

Anulando obtenemos en el intervalo de estudio la raíz $x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}A}$

$Sg\,\frac{dS}{dx}$: 0 — x_0 + ; S decrece en $(0, x_0)$ y crece a partir de x_0.

De acuerdo a los cálculos realizados el punto crítico correspondiente a x_0 es el **mínimo** absoluto de la función , cuyo bosquejo es el que se indica en la figura.



De la relación (2) obtenemos:

$y_0 = \sqrt{\frac{b}{a}A}$ Los lados del rectángulo de estiba serán entonces $\sqrt{\frac{a}{b}A}$ y $\sqrt{\frac{b}{a}A}$.

Puedes deducir que si las paredes son del mismo espesor (a = b) el rectángulo de estiba y el rectángulo exterior serán cuadrados.

b) Llamando S_1 a la superficie de piso ocupada por las paredes tendremos:

$$S_1(x) = S(x) - A$$

Como A es constante , resulta obvio entonces que el valor de **x** que minimiza S(x) minimiza también $S_1(x)$.

c) Para $A = 100\ m^2$ $a = b = 0.20\ m$ obtenemos:

$x = 10\ m \qquad y = 10\ m$

Para el rectángulo exterior:

$x + 2\,a = 10.40\ m \qquad y + 2\,b = 10.40\ m \qquad S_1 = 10.40^2 - 100 = 8.16\ m^2$

Ejercicio No. 27

$$V(t) = \frac{80}{9}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t\right) + \frac{1180}{27}$$

t en horas , **V** en Km / h

a) Estudiaremos la función en el intervalo [0,5] (de 17 horas a 22 horas).

$$V(0) = \frac{1180}{27} \cong 43.7\ \text{Km / h} \qquad V(5) \cong 36.3\ \text{Km / h}$$

Puntos críticos

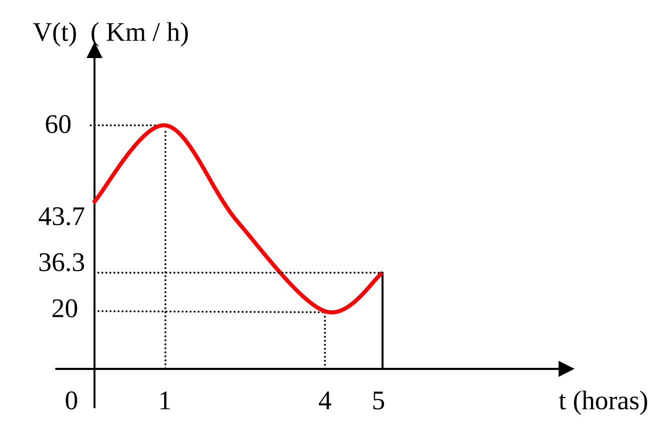
$$\frac{dV}{dt} = \frac{80}{9}(t^2 - 5t + 4) \qquad \text{Anulando: } t^2 - 5t + 4 = 0$$

Raíces: $t_1 = 1 \qquad t_2 = 4$

$V(1) \cong 60$ Km / h $\qquad V(4) \cong 20$ Km / h

De acuerdo a los cálculos realizados y siendo la función de tipo polinómico podemos afirmar que el máximo absoluto se produce en t = 1 y el mínimo absoluto en t = 4 .

b) El bosquejo gráfico de la función es el que indica la figura.



Los resultados indican un tránsito fluido a las l8 horas que paulatinamente se va enlenteciendo hasta las 21 horas y que luego comienza a agilizarse nuevamente.

Ejercicio No. 28

Sea **x** el número de apartamentos alquilados.

El número de apartamentos no alquilados será entonces: 150 – x .

Como el número de apartamentos alquilados disminuye linealmente a razón de 5 apartamentos por cada 30 dólares de aumento en el alquiler , la razón será de 1 apto. no alquilado por cada 6 dólares de aumento en el alquiler.

Los apartamentos alquilados tendrán , cada uno , un alquiler de :

$$300 + 6\,(150 - x) \qquad (\text{U\$S})$$

Como se alquilan x apartamentos la ganancia total G se expresará analíticamente como : $G(x) = x.[\,300 + 6\,(150 - x)\,] = -6x^2 + 1200x$ con $0 \leq x \leq 150$

La función ganancia es entonces una simple función cuadrática con concavidad negativa. Busquemos su máximo , vértice de la parábola representativa.

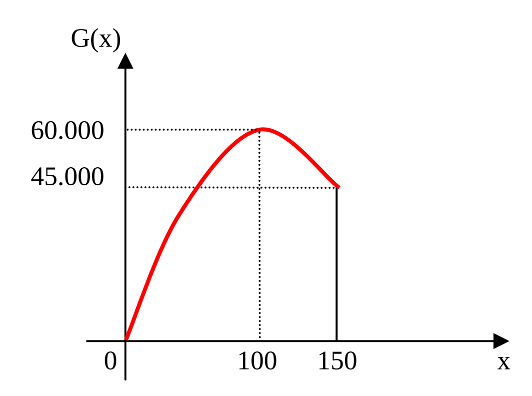
Derivando: $\dfrac{dG}{dx} = -12x + 1200$

Anulando: $x = 100$

Como el valor hallado pertenece al intervalo de estudio , corresponderá al máximo absoluto de la función.

El bosquejo gráfico de la función G es el indicado en la figura.

G(100) = 60000 U$S G(0) = 0 G(150) = 45000 U$S



b) El número de apartamentos alquilados será **100** y el alquiler de cada uno de **U$S 600 ,** y la ganancia total de **U$S 60000** .

c) Si se alquilaran todos los apartamentos la ganancia sería de G(150) = 45000 U$S lo que implicaría una pérdida para la inmobiliaria de 15000 U$S .

Ejercicio No.29

a) $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$

Para estudiar la función en el intervalo [0,5] calculamos:

$N(0) = 0$ $\quad N(5) = 100$ $\quad \dfrac{dN}{dt} = -3t^2 + 12t + 15$

Anulando: $t_1 = 5 \quad t_2 = -1$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = -6t + 12$$

Anulando: $t = 2$

$Sg \dfrac{dN}{dt}$ + (0 a 5, creciente ↗)

0 5

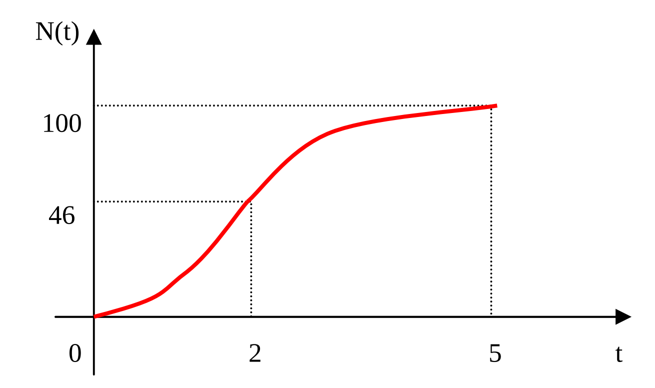
La función es entonces creciente en el intervalo con tangente horizontal en el extremo x = 5 .

$Sg. \dfrac{d^2N}{dt^2}$ + (0 a 2), 0 en 2, — (2 a 5)

0 2 5

De acuerdo a lo anterior la función presenta punto de inflexión en t=2 cambiando su concavidad de positiva a negativa a medida que crece **t** .

El bosquejo gráfico será entonces:



b) Puedes responder a esta pregunta observando la figura anterior o remitiéndote a los cálculos realizados.

Si imaginas las tangentes en los distintos puntos de la curva puedes concluir que las

pendientes van aumentando desde t = 0 a t = 2 para luego comenzar a decrecer hasta anularse en t = 5.

La **máxima** eficiencia ocurre entonces en t=2 o sea a las 10 horas de la mañana (hemos tomado t= 0 a la hora 8.00 , comienzo del turno).

Si te remites a los cálculos la derivada segunda estudiada en la parte **a)** no es más que la derivada primera de la función eficiencia $\frac{dN}{dt}$.

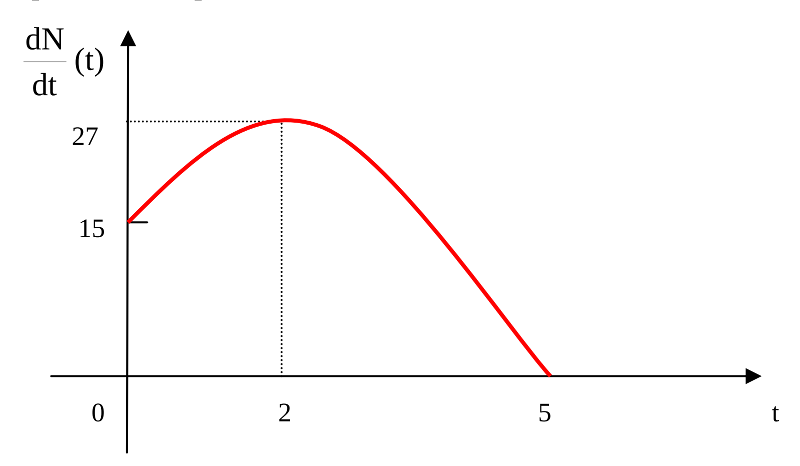
Esta será creciente hasta t=2 y luego decreciente presentando máximo absoluto en ese valor de t .

c) Para contestar la pregunta basta calcular:

$\frac{dN}{dt}(0) = 15$ y $\frac{dN}{dt}(5) = 0$

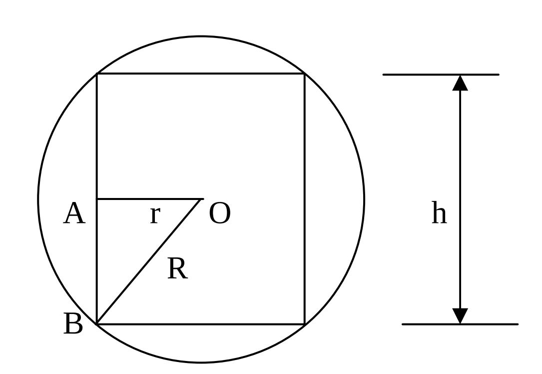
La eficiencia **mínima** ocurre entonces en t=5 , hora 13 final de turno.

d) Como la eficiencia es una función cuadrática con concavidad negativa , el gráfico que se indica corresponde a una parábola.



Ejercicio No.30

a) Sean **R** , **r** y **h** las longitudes indicadas en la figura.



El volumen del cilindro que pretendemos maximizar viene dado por la expresión:

$$V = \pi\, r^2\, h \qquad (1)$$

Las variables **r** y **h** pueden relacionarse aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OAB.

Se cumplirá entonces: $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad (2)$

Llegado a este punto debes elegir expresar el volumen **V** en función de **r** o de **h**.
Para el primer caso deberías despejar **h** de la relación (2) , lo que te conduciría a introducir un radical en la expresión de **V**. Resulta más conveniente a efectos de los cálculos despejar $\mathbf{r^2}$ y sustituir en (1) expresando **V** como función de **h .**

Obtienes entonces: $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$ que sustituída en (1) te conduce a :

$$V = \pi\,(R^2 h - \frac{h^3}{4}) \qquad 0 \le h \le 2R$$

Puntos críticos

$$\frac{dV}{dh} = \pi(\ R^2 - \frac{3}{4}\ h^2) \qquad \text{Anulando: } h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

$Sg\,\frac{dV}{dh}$

0	$+$ ↗	0 at $\frac{2}{\sqrt{3}}R$	$-$ ↘	$2R$

El único punto crítico en el intervalo corresponde pues al **máximo** absoluto de la función V de acuerdo a lo anterior.
Los correspondientes valores de **r** y **V** los obtenemos de las relaciones (2) y (1) respectivamente.

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R \qquad V_{max.} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$$

b) La superficie lateral **S** del cilindro será:

$$S = 2\pi\, r\, h$$

La relación entre **r** y **h** sigue estando dada por la expresión (2) de la parte **a)**.

Despejando **r** obtienes : $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$

Sustituyendo en (1): $S(h) = 2\pi\, h \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$ $\qquad 0 \leq h \leq 2R$

Estudiemos la función en el intervalo indicado.

S(0) = 0 $\qquad$ S(2R) = 0

$$\frac{dS}{dh} = \pi\left[\sqrt{4R^2 - h^2} + h\frac{-2h}{2\sqrt{4R^2 - h^2}}\right] = \pi\frac{4R^2 - h^2 - h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}}$$

Anulando: $\qquad 4R^2 - 2h^2 = 0$

Teniendo en cuenta que $h \geq 0$, obtenemos $\quad h = \sqrt{2}\,R$

Sg $\frac{dS}{dh}$: $\quad$ 0 (+) $\sqrt{2}\,R$ [0] (—) 2R

Los resultados anteriores muestran que el punto crítico hallado corresponde al máximo absoluto de la función en el intervalo de estudio.

De la relación (2) : $\quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{h}{2} \qquad$ y $\qquad S_{max.} = 2\,\pi\,R^2$

Repara en que , de acuerdo a los resultados, las dimensiones del cilindro de volumen máximo no coinciden con las del de superficie lateral máxima.

c) El porcentaje pedido será : $\quad \frac{V_{max\,Cil.}}{V_{esf.}}.100$

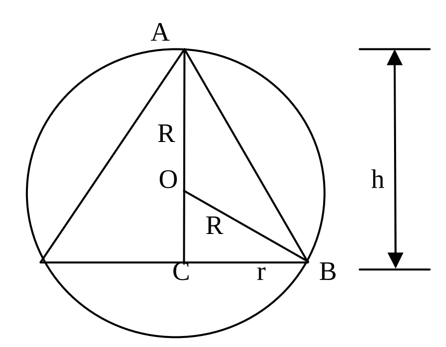
En consecuencia: $\quad \frac{\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}}{\frac{4\pi R^3}{3}}.100 = \frac{1}{\sqrt{3}}.100 \cong$ **58** %

Ejercicio No. 31

Sean **r** , **R** , y **h** las indicadas en la figura .

El volumen del cono vendrá expresado por: $V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h \qquad (1)$

El cono de volumen máximo debe tener su base en la semiesfera inferior pues todo cono tiene otro con base simétrica respecto al plano diametral de la esfera ⊥ AC, en la semiesfera superior , pero de menor altura , lo que permite variar **h** en [R,2R] .



La relación entre **r** y **h** la obtienes aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OCB . $(h - R)^2 + r^2 = R^2$ (2)

Despejando r^2 de la relación (2) y sustituyendo en (1) obtienes:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[R^2 - (h-R)^2\right].h = \frac{\pi}{3}\left(2Rh^2 - h^3\right) \qquad R \le h \le 2R$$

Puntos críticos

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}\left(4Rh - 3h^2\right) \qquad \text{Anulando:} \quad h = 0 \quad h = \frac{4}{3}R$$

Valores funcionales:

$$V(R) = \frac{1}{3}\pi R^3 \qquad V(2R) = 0 \qquad V\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3$$

En consecuencia el **máximo** absoluto de la función corresponde a : $h = \frac{4}{3}R$.

De la relación (2) el correspondiente valor de **r** será: $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Ejercicio No.32

La función demanda es: $q = 1000\, e^{-0{,}004\,p}$ (1)

siendo **p** el precio por unidad y **q** la cantidad demandada por mes.

La utilidad del fabricante será entonces: G = q . p (\$ / mes)

Sustituyendo **q** de la expresión (1) obtienes:

$$G(q) = 1000\, p\, e^{-0{,}004\,p}$$

Bosquejaremos el gráfico de la función G para $p \ge 0$.

$G(0) = 0$ $\qquad \lim\limits_{p \to +\infty} G(p) = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{1000p}{e^{0.004p}} = 0$ (órdenes de infinitos) .

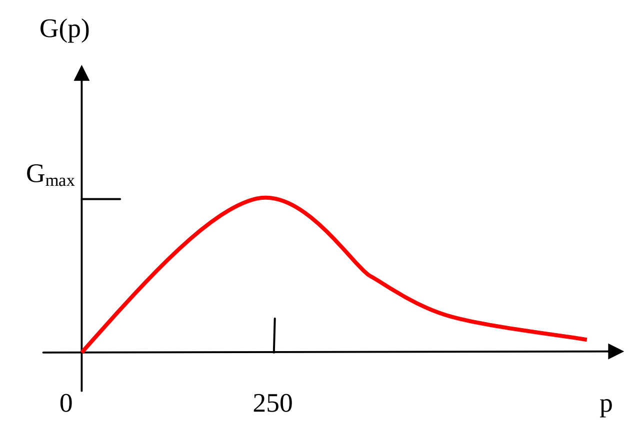
Puntos críticos

$$\frac{dG}{dp} = 1000\left(e^{-0.004p} - p.0.004.e^{-0.004p}\right) = 1000\, e^{-0.004p}(1 - 0.004p)$$

Anulando: $\quad 1 - 0.004\,p = 0 \Longrightarrow p = 250$

Siendo positiva la función G el punto crítico corresponde al máximo absoluto de la función.

El bosquejo de la función será el indicado en la figura.



La cantidad demandada **q** será:

$$q = 1000\, e^{-0{,}004.(250)} = 1000\, e^{-1} \cong 367{,}88$$

Como la cantidad demandada no es un número entero calcularemos la utilidad y el precio , teniendo en cuenta el bosquejo gráfico anterior, para q = 367 y q = 368.

q = 367 $\qquad 367 = 1000e^{-0{,}004\,p} \Longrightarrow p = \dfrac{-L(0.367)}{0.004} \cong 250{,}60$

G(250,60)=91969,60

q = 368 $\qquad 368 = 1000\, e^{-0{,}004\,p} \Longrightarrow p = \dfrac{-L(0.368)}{0.004} \cong 249{,}92$

G(249,92)= 91969,60

El precio de venta de los repuestos deberá ser entonces de 249,92 \$ / unidad para obtener máxima ganancia.

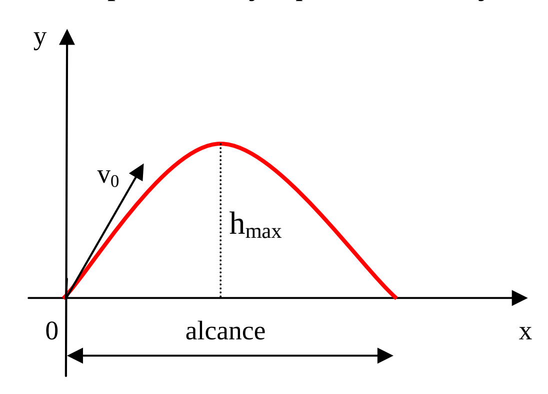
b) La demanda será de **368** $\dfrac{\text{unid.}}{\text{mes}}$ y las utilidades serán de **91969,60** $\dfrac{\$.}{\text{mes}}$.

Ejercicio No. 33

La ecuación de la trayectoria es :

$$y(x) = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + (\operatorname{tg}\theta\ )x \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

a) La trayectoria será parabólica ya que la función **y** es cuadrática.



b) Siendo $\mathbf{v_0}$ y **θ** constantes debemos hallar la ordenada del vértice de la parábola.

Derivando: $\frac{dy}{dx} = \frac{-g}{v_0^2\cos^2\theta}x + \operatorname{tg}\theta$

Anulando: $\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}x = \operatorname{tg}\theta \implies x = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

La altura máxima será entonces:

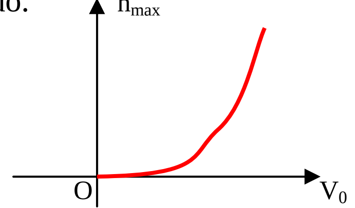
$$h_{max.} = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(\frac{v_0^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{g^2}\right) + \operatorname{tg}\theta\frac{v_0^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}$$

Operando obtienes finalmente:

$$h_{max} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

c) Siendo θ constante la altura máxima $h_{max.}$ será entonces función cuadrática de $v_{0.}$

El bosquejo gráfico es el indicado.



d) Siendo ahora v_0 constante , la altura máxima será función de θ.

Bosquejaremos la función $h_{max.}$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi / 2$.

$h_{max.}(0) = 0$ $\qquad$ $h_{max.}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g}$

Derivando:

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{v_0^2}{2g} 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}(2\theta)$$ (Recuerda que $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$)

Anulando: $\theta = 0$ $\qquad$ $\theta = \pi / 2$

Como $\operatorname{sen}(2\theta) \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi / 2$, la función es monótona creciente en el intervalo, con tangente horizontal en ambos extremos.

Calculemos la derivada segunda: $\frac{d^2h}{d\theta^2} = \frac{v_0^2}{2g} \cos(2\theta).2 = \frac{v_0^2}{g} \cos(2\theta)$

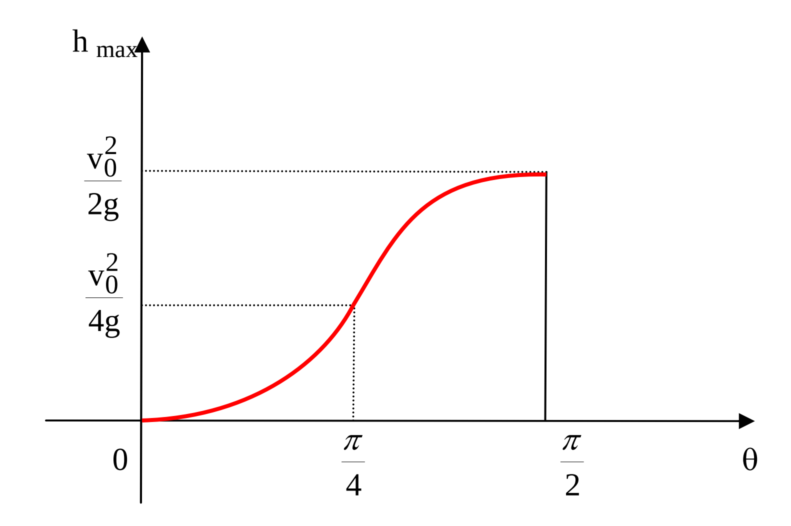
Anulando: $2\theta = \pi / 2 \implies \theta = \pi / 4$

$Sg \frac{d^2h}{d\theta^2}$ $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ —

0 $\qquad$ $\pi/4$ $\qquad$ $\pi/2$

La función presenta punto de inflexión en $\theta = \pi / 4$ siendo su ordenada $h(\pi/4) = \frac{v_0^2}{4g}$.

El bosquejo gráfico es el indicado en la figura.



Alcance del proyectil

Para determinar el alcance **L** podríamos hacer y=0 en la ecuación de la trayectoria y obtener el valor de **x** correspondiente.

Sin embargo, teniendo en cuenta la simetría de la parábola respecto de su eje, puedes deducir que el alcance es el doble de la abscisa del punto de altura máxima que calculamos en la parte **b)** del ejercicio.

Por tanto: $$L = 2\frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta)$$

Suponiendo v_0 constante L será función de θ siendo la expresión analítica de la misma: $$L(\theta) = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta)$$

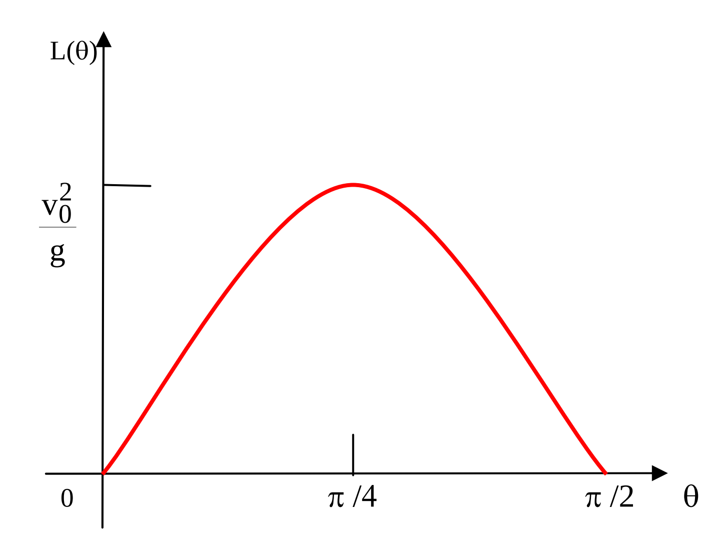
Bosquejaremos el gráfico en el intervalo $0 \le \theta \le \pi/2$.

$L(0) = 0$ $\quad$ $L(\pi/2) = 0$ $\quad$ $$\frac{dL}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}\cos(2\theta).2 = \frac{2v_0^2}{g}\cos(2\theta)$$

Anulando: $\cos(2\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = \pi/4 \Longrightarrow L(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}$

El punto crítico hallado corresponde entonces al máximo absoluto de la función en el intervalo.

En consecuencia se tendrá **máximo** alcance del proyectil cuando el ángulo de lanzamiento sea de 45^0, para una velocidad inicial dada , siendo además proporcional al cuadrado de la misma.



Ejercicio No. 34

a) Como el gasto de combustible es proporcional al cuadrado de la velocidad tendremos:

$$G_c = k.v^2 \quad \left(\frac{\$}{h}\right) \qquad k > 0$$

Si : $v = 40 \ \frac{km}{h}$ $\quad G_c = 1600 \ \frac{\$}{h}$ $\Longrightarrow$ $k = \frac{1600}{40^2} = 1 \ \frac{\frac{\$}{h}}{km^2}$

b) El gasto total en $\frac{\$}{h}$ será la suma del gasto en combustible más el gasto fijo.

$$G_T = k.v^2 + 3.600 \quad \frac{\$}{h}$$

Para obtener el gasto total en $\frac{\$}{km}$ es necesario dividir por la velocidad v.

$$\Longrightarrow \qquad G_T = k.v + \frac{3600}{v} \quad \frac{\$}{km}$$

La velocidad más económica será la que minimiza la expresión anterior para **v** > 0.

Bosquejemos el gráfico de la función $G_{T.}$

$\lim_{v \to 0^+} G_{T.} = +\infty \qquad \lim_{v \to +\infty} G_{T.} = +\infty$

Puntos críticos

$$\frac{dG_T}{dv} = k - \frac{3600}{v^2} = \frac{kv^2 - 3600}{v^2}$$

Anulando: $\quad kv^2 - 3600 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3600}{k}}$

Como k = 1 concluímos que v = 60.

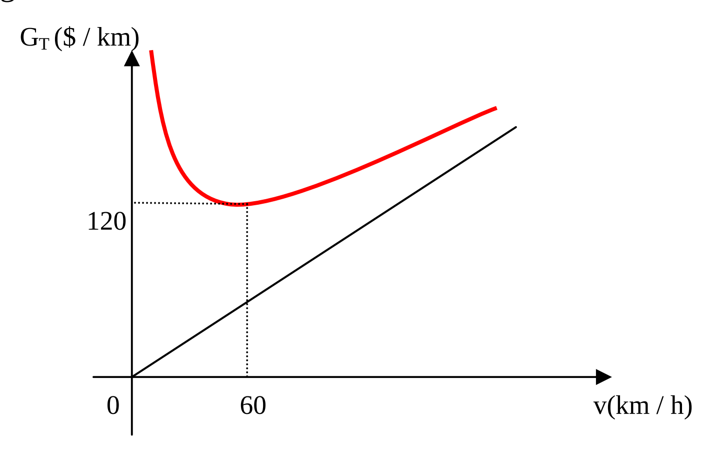
El punto crítico hallado corresponde al **mínimo** absoluto de la función en el intervalo (0, +∞).

La velocidad más económica para el desplazamiento de la locomotora será entonces de **60** $\frac{km}{h}$.

El costo por kilómetro será: $\quad G_T\,(60) = 60 + \frac{3600}{60} = \mathbf{120} \ \frac{\$}{km}$.

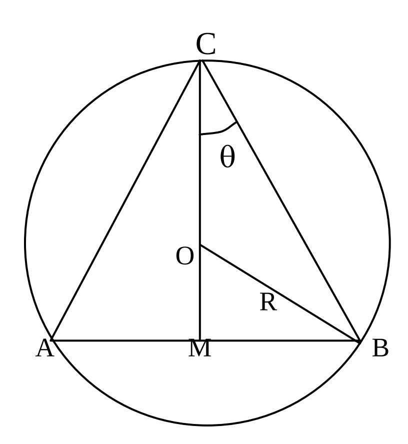
El costo de un viaje de 1000 Km. ascenderá entonces a $ **120.000** .

El bosquejo gráfico de la función es el indicado.



Ejercicio No. 35

a) Tratemos de hallar la expresión **p**(θ) siendo **p** el perímetro del triángulo ABC.



Considerando el triángulo OMB: ∠MOB = 2θ (ángulo central e inscrito correspondientes).

En consecuencia : MB = R sen (2θ) ⟹ AB = 2 R sen (2θ)

Considerando el triángulo CMB :

$$BC = \frac{MB}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{R\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2R\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Finalmente entonces:

$$BC = 2R\cos(\theta)$$

El perímetro será: $p(\theta)=2R\operatorname{sen}(2\theta) + 2.2R\cos\theta = 2R\,(\operatorname{sen}(2\theta) + 2\cos\theta)$

Operando concluyes finalmente que:

$$p(\theta) = 4R\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$$

b) Determinemos el máximo de la función **p** en el intervalo $0 \le \theta \le \pi/2$.

$p(0) = 4R \qquad p(\pi/2) = 0$

<u>Puntos críticos</u>

$$\frac{dp}{d\theta} = 4R\left[-\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + 1) + \cos\theta.\cos\theta\right] = 4R\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta\right)$$

Teniendo en cuenta que $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$ obtenemos finalmente:

$$\frac{dp}{d\theta} = 4R.(-2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1)$$

Anulando: $-2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \implies \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4}$

Como $0 \le \theta \le \pi/2$ sólo tenemos la solución $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \implies \theta = \dfrac{\pi}{6}$

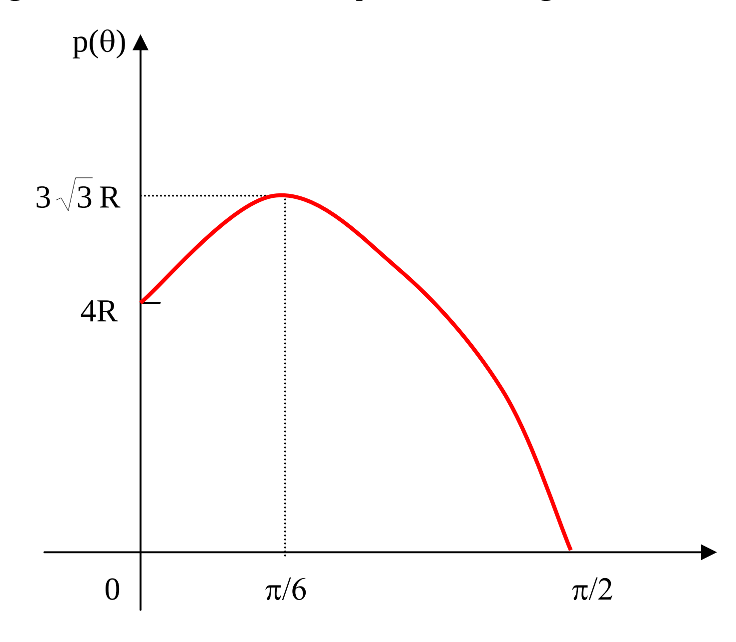
El valor funcional en el punto crítico será:

$$p\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4R\cos\frac{\pi}{6}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + 1\right) = 3\sqrt{3}\,R$$

De acuerdo a los resultados de los cálculos efectuados podemos afirmar que el punto crítico corresponde al **máximo** absoluto de la función.

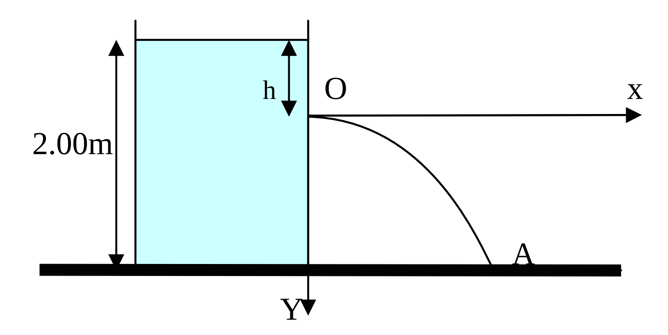
El triángulo de máximo perímetro es entonces el triángulo equilátero.

El bosquejo del gráfico de la función es el que indica la figura.



Ejercicio No. 36

En el sistema XOY indicado en la figura la ecuación de la curva descripta por el chorro es: $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$ (1)



Las coordenadas del punto A serán: A (x , 2 –h).

La relación (1) nos permitirá llegar a la relación entre **x** y **h** para estudiar su variación.

Tendremos entonces: $2 - h = \frac{g}{2v_0^2}x^2$ (2)

Sabemos que la velocidad de salida del líquido (v_0) cumple $v_0 = \sqrt{2gh}$, por lo que sustituyendo en (2) obtenemos:

$(2-h).\ 2\left(\sqrt{2gh}\right)^2 = g\,x^2$ Operando: $x^2 = 4h.(2-h)$

finalmente y teniendo en cuenta que $x \geq 0$ obtienes:

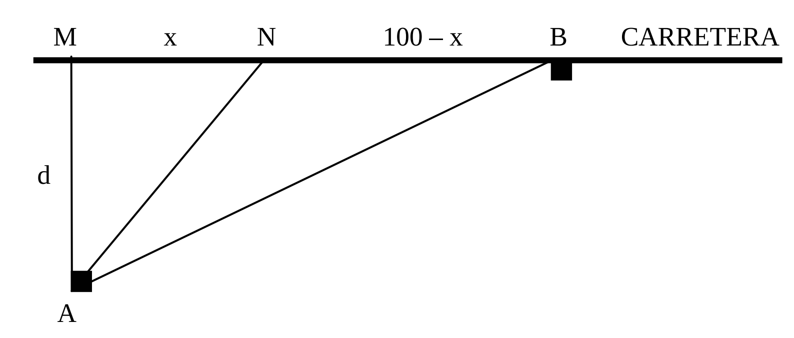
$$x(h) = 2\sqrt{2h - h^2} \quad (3) \qquad 0 \leq h \leq 2$$

Para maximizar **x** alcanza con maximizar la cantidad subradical , función cuadrática con concavidad negativa.

Como $2h - h^2 = h\,(2 - h)$ sus raíces serán: $h_1=0$ y $h_2=2$ con lo que el vértice de la parábola corresponde a **h** = 1 y el correspondiente valor de **x** es de acuerdo a (3) x (1) = 2.

En definitiva el tanque debe perforarse a una profundidad de 1m, lo que en nuestro caso equivale a 1m de altura desde el piso , y el chorro golpeará al mismo a 2m de la pared del tanque.

Ejercicio No. 37



a) El vehículo tiene distintas posibilidades para ir desde A hasta B. Podría , por ejemplo, ir directamente de A a B, podría efectuar el recorrido AMB o eventualmente uno como el ANB.

Trataremos de determinar cuál de todos los recorridos posibles corresponde a tiempo mínimo de acuerdo a las velocidades dadas.

Llamemos: $v_1 = 80\ \frac{km}{h}$ velocidad en el terreno , $v_2 = 100\ \frac{km}{h}$ velocidad en la carretera , distancia MN = $d_{MN} = x$ distancia NB = $d_{NB} = 100 - x$ $d_{AM} = d = 36km$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AMN tendremos: $d_{AN} = \sqrt{d^2 + x^2}$

El tiempo empleado por el vehículo en los tramos AN y NB serán respectivamente, recordando que el movimiento es rectilíneo uniforme:

$$t_{AN} = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} \qquad t_{NB} = \frac{100 - x}{v_2}$$

La expresión analítica del tiempo total **t** en función de la distancia **x** será entonces:

$$t(x) = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} + \frac{100 - x}{v_2}$$

Estudiemos la función en el intervalo [0,100].

$$t(0) = \frac{d}{v_1} + \frac{100}{v_2} = \frac{36}{80} + \frac{100}{100} \cong 1^h 27^m$$ (corresponde al trayecto AMB)

$$t(100) = \frac{\sqrt{36^2 + 100^2}}{80} \cong 1^h 19^m$$ (corresponde al trayecto AB)

Puntos críticos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}$$

Anulando: $\frac{x}{v_1\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{v_2} = 0 \Longrightarrow v_2.x = \sqrt{d^2+x^2}\,.\,v_1$ (1)

Elevando ambos miembros al cuadrado y operando obtienes:

$$v_2^2x^2 - v_1^2x^2 = d^2v_1^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{d^2v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pm\, d.v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$$

El valor negativo de **x** lo desechamos dado que sólo estamos considerando el intervalo [0, 100].

Te dejamos como tarea verificar que el valor hallado de **x** es raíz de la ecuación (1).

Para los valores dados tendremos: $x = \frac{36.(80)}{\sqrt{100^2 - 80^2}} = 48\,\text{km}.$

El valor funcional correspondiente al punto crítico encontrado es: $t(48) \cong 1^h\ 16^m$.

Dado que el punto crítico encontrado en el intervalo es único , de la comparación del valor funcional en él con los valores funcionales en los extremos del intervalo, que habíamos calculado , concluímos que aquél corresponde al **mínimo** absoluto de la función.

En definitiva entonces, el tiempo de recorrido es mínimo cuando el vehículo recorre el trayecto ANB siendo N el punto distante 48 km. del punto M.

b) El tiempo de recorrido será: $t = 1^h\ 16^m$

Ejercicio No. 38

a)

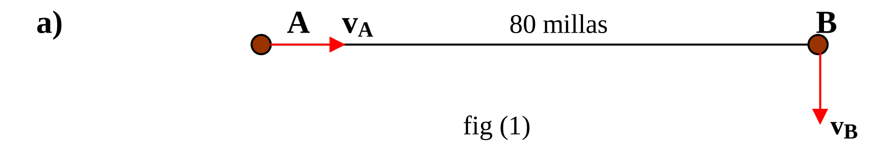
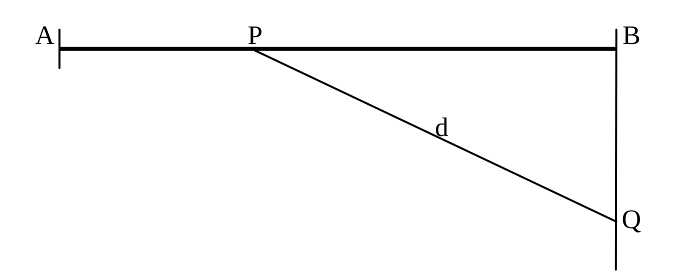


fig (1)

Tomemos t = 0 a las 12.00 horas del mediodía.

La fig. (1) muestra la posición de los barcos en t = 0.

La fig.(2) indica la situación al cabo de cierto tiempo **t** , instante en el que determinaremos la distancia **d** que los separa como función del tiempo **t**.



Supongamos que en el instante **t** el barco (I) que originalmente estaba en el punto A se encuentra ahora en el punto P. Como el movimiento es rectilíneo uniforme se cumplirá que : $d_{AP} = v_A.t$.

Análogamente el barco (II) que inicialmente se encontraba en el punto B estará ahora en el punto Q cumpliéndose que: $d_{BQ} = v_B.t$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo PBQ tendremos:

$PB^2 + QB^2 = PQ^2 \quad \Longrightarrow \quad (80 - v_A.t)^2 + (v_B.t)^2 = d^2$

Finalmente: $d(t) = \sqrt{(80 - v_A t)^2 + (v_B t)^2}$

Para minimizar la función **d** en el intervalo de estudio $[0,+\infty)$, basta minimizar la cantidad subradical a la que llamaremos **y**.

Operando: $y = \left(v_A^2 + v_B^2\right)t^2 - 160v_A.t + 6400$

Como puedes observar se trata de una función cuadrática de concavidad positiva. Determinaremos el vértice de la parábola representativa y si su abscisa pertenece al intervalo de estudio corresponderá al mínimo absoluto que estamos buscando , de la función.

Derivando: $\dfrac{dy}{dt} = 2\left(v_A^2 + v_B^2\right).t - 160v_A$

Anulando obtenemos como raíz el valor: $t = \dfrac{80\, v_A}{v_A^2 + v_B^2} > 0 \quad \in [0,+\infty)$

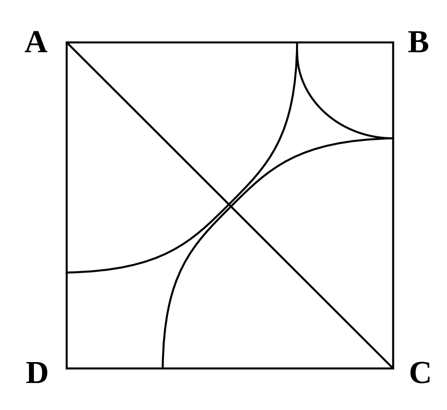
Siendo v_A= 20 nudos v_B = 25 nudos $\Longrightarrow$ $t \cong 1{,}56\ h \cong 1^h\ 34^m$

Los barcos se encontrarán entonces a distancia mínima a las $13^h\ 34^m$.

b) La distancia que los separa será : $d(1{,}56) = \sqrt{(80 - v_A.1{,}56)^2 + (v_B.1{,}56)^2}$

d(1,56) ≅62,47 millas náuticas ≅115,707km.

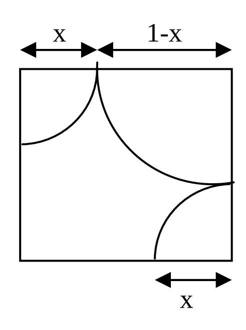
Ejercicio No. 39



a) Como los círculos de centros A y C son de igual radio **x** , el máximo valor para que aquellos no se solapen será , como puedes observar en la figura anterior , la mitad de la diagonal del cuadrado.

En consecuencia siendo el lado **L** del cuadrado de 1m: $x_{max} = \frac{\sqrt{2}L}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m .

b)



El área a considerar se compone de dos cuadrantes de círculo de radio **x** y un cuadrante de radio **1-x** . Llamando **A** al área tendremos:

$$A(x) = 2\left(\frac{\pi x^2}{4}\right) + \frac{1}{4}\pi(1-x)^2$$

Operando: $$A(x) = \frac{3}{4}\pi x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}\left(3x^2 - 2x + 1\right)$$

La función área es entonces una función cuadrática que estudiaremos en el intervalo $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

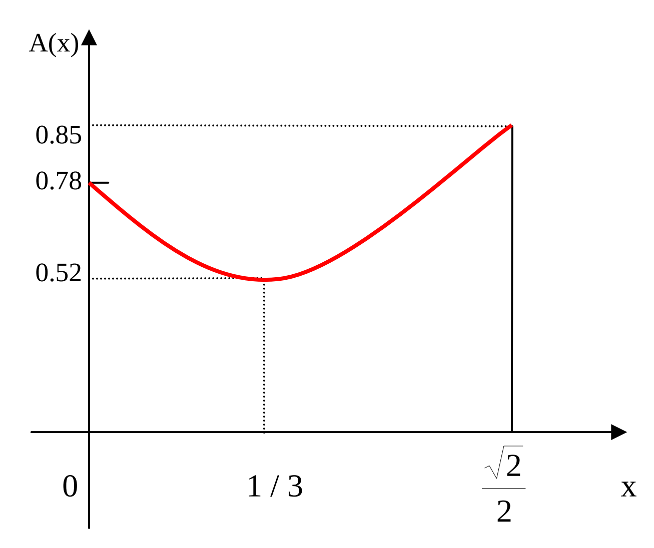
$A(0) = \frac{\pi}{4} \cong 0.78$ $\quad$ $A(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{5-2\sqrt{2}}{8}\pi \cong 0.85$

Derivando: $\frac{dA}{dx} = \frac{\pi}{4}(6x - 2)$

Anulando obtenemos la abscisa del vértice de la parábola.

$6x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}$ $\qquad A\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

El bosquejo gráfico de la función área es el indicado en la figura.



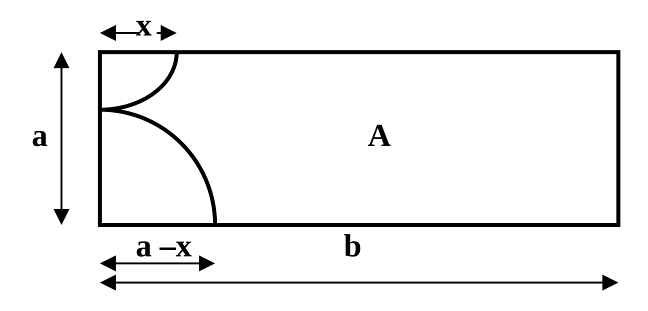
i) El **máximo** de la función área se produce en el extremo derecho del intervalo de acuerdo al bosquejo anterior , es decir en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii) El **mínimo** de la función área se produce para $x = \frac{1}{3}$.

c) Los valores **máximo** y **mínimo** del área serán:

$$A_{max} = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{8}\pi \qquad\qquad A_{min} = \frac{\pi}{6}$$

Ejercicio No. 40



a) El área **A** es la diferencia entre el área del rectángulo y la suma de dos cuadrantes de círculo de radios **x** y **a – x** .

En consecuencia la expresión analítica de la función A será:

$$A(x) = ab - \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(a-x)^2}{4}\right]$$

Operando obtenemos: $A(x) = \frac{-\pi x^2}{2} + \frac{\pi a x}{2} + ab - \frac{\pi a^2}{4}$

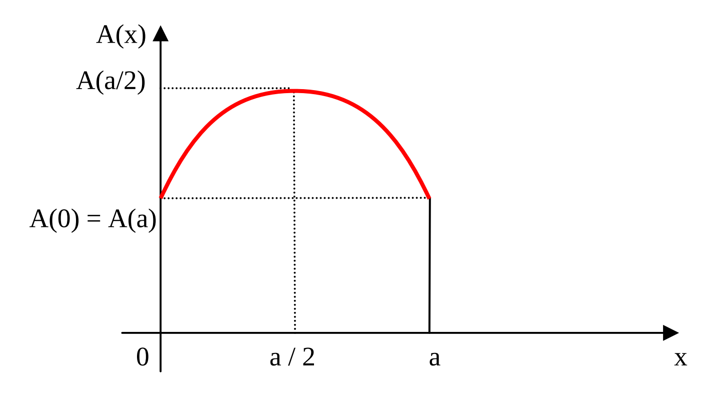
Como puedes observar se trata de una simple función cuadrática con concavidad negativa que estudiaremos en el intervalo [0,a] .

$A(0) = ab - \frac{\pi.a^2}{4}$ $\qquad$ $A(a) = ab - \frac{\pi.a^2}{4}$

Vértice de la parábola representativa de la función.

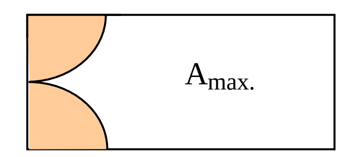
$$\frac{dA}{dx} = -\pi x + \frac{\pi a}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{2} \qquad A(\frac{a}{2}) = \frac{-\pi.a^2}{8} + ab$$

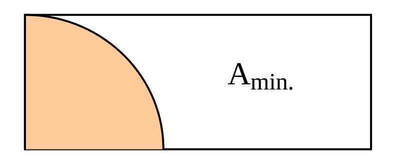
El bosquejo gráfico de la parábola será como el indicado.



i) El área **A** es **máxima** cuando los círculos son de igual radio : $x = \frac{a}{2}$

ii) El área **A** es **mínima** cuando uno de los círculos tiene radio **a** y el otro radio **0**.

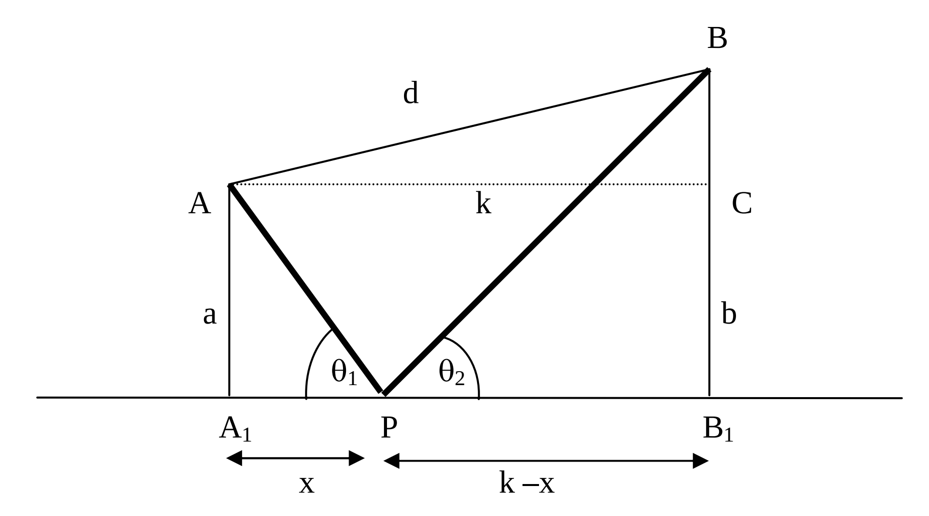




b) Los valores **máximo** y **mínimo** del área son:

$$A_{max.} = \frac{-\pi.a^2}{8} + ab \qquad A_{min.} = ab - \frac{\pi.a^2}{4}$$

Ejercicio No. 41



1) Llamemos **L** a la longitud total de la tubería es decir a la suma de distancias PA+ PB.

Nuestro problema es determinar la posición del punto P para que la suma de esas distancias sea **mínima**.

Este es un problema que seguramente has resuelto en el curso de geometría como una aplicación de Simetría axial. Recuerda que la solución consistía en simetrizar el punto A (o el B) respecto de la recta A_1B_1 considerada como eje de la simetría , y luego unir su imagen con el punto B (o el A). La intersección de esta última recta con el eje te definía la posición del punto P.

Resolveremos este mismo problema pero ahora analíticamente.

De acuerdo a la figura anterior tendremos que, considerando los triángulos AA_1P y BB_1P: $d_{AP} = \sqrt{x^2 + a^2}$ $d_{BP} = \sqrt{(k - x)^2 + b^2}$

Finalmente: $L(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(k - x)^2 + b^2}$ $0 \leq x \leq k$

<u>Cálculo del punto crítico</u>

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{(k - x)(-1)}{\sqrt{(k - x)^2 + b^2}} \quad (1)$$

En el triángulo AA_1P : $\cos\theta_1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

En el triángulo BB_1P: $\cos\theta_2 = \dfrac{(k-x)}{\sqrt{(k-x)^2 + b^2}}$

Sustituyendo en la relación (1) tendremos:

$$\frac{dL}{dx} = \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \qquad (2)$$

Anulando la derivada: $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0 \Longrightarrow \cos\theta_1 = \cos\theta_2$ (3)

Como θ_1 y $\theta_2 \leq \pi/2$ la igualdad (3) implica $\boldsymbol{\theta_1 = \theta_2}$

Queda por clasificar el punto crítico correspondiente a la condición anterior de igualdad de los ángulos

Para ello podrías estudiar el signo de la derivada que hemos calculado o eventualmente calcular la derivada segunda y ver su signo en el punto crítico.

Sin embargo en el enunciado del ejercicio te hemos indicado que admitas que el punto crítico encontrado corresponde al **mínimo** absoluto de la función en el intervalo, como efectivamente ocurre.

2) Se te pide ahora determinar el valor de **x** correspondiente al punto crítico anterior, valor que permitirá determinar la posición del punto P o sea la ubicación de la bomba.

En el triángulo AA_1P : $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{a}{x}$

En el triángulo BB_1P : $\operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{b}{k-x}$

Como $\theta_1 = \theta_2 \Longrightarrow \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_2 \Longrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{k-x}$

Finalmente entonces: $X_P = \dfrac{ka}{a+b}$

El valor de **k** se obtiene del triángulo ACB: $k = \sqrt{d^2 - (b-a)^2} \Longrightarrow$

$$X_P = \frac{a}{a+b}\sqrt{d^2 - (b-a)^2}$$

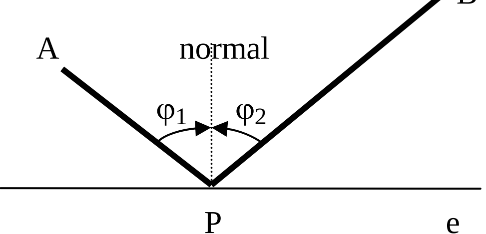
3) Para los valores dados: $a = 1{,}5$ km $b = 3$ km $d = 3{,}5$ km se deduce que:

$$X_P \cong 1{,}05 \text{ km}$$

La longitud de la tubería será : $L \cong 5{,}5$ km.

Comentario

La igualdad de los ángulos θ_1 y θ_2 implica la igualdad de los ángulos φ_1 y φ_2 de la figura.



La suma de distancias AP + PB es **mínima** cuando se cumpla que : $\varphi_1 = \varphi_2$.

Si recuerdas que un rayo de luz que provenga del punto A y luego de reflejarse en el espejo **e** deba pasar por el punto B, realiza el recorrido de tiempo mínimo (Principio de Fermat), convendrás en que, como la propagación se efectúa a velocidad constante ese recorrido es el mismo que el de suma AP + PB mínima .

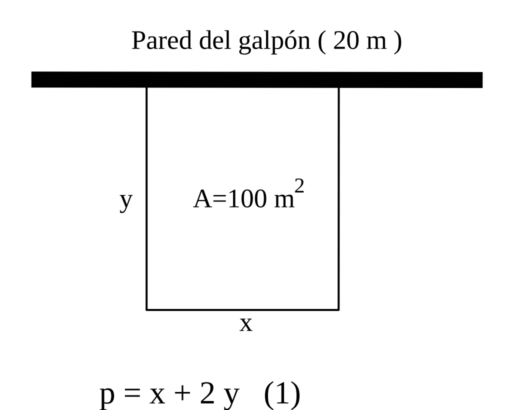
En consecuencia la parte **1)** del ejercicio no es otra cosa que una demostración de la Ley de la Reflexión de la luz (ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión) que conoces desde tus cursos escolares.

Ejercicio No. 42

a) Como el costo de alambre es proporcional a la longitud , para minimizar el costo bastará minimizar la longitud de alambre a utilizar.

Habiéndose determinado que se utilizarán tres tiros de alambre paralelos o sea de igual longitud , en definitiva bastará **minimizar** el perímetro **p** a alambrar.

Llamando **x** e **y** a los lados del rectángulo como se indica en la figura, tendremos:



$$p = x + 2y \quad (1)$$

Siendo el área de 100 m^2 se cumplirá que: $x.y = 100 \quad (2)$

De (2) : $y = \dfrac{100}{x}$

Sustituyendo en (1) : $p(x) = x + \dfrac{200}{x}$ $\quad 0 < x \leq 20$

$\lim\limits_{x \to 0^+} p(x) = +\infty$ $\qquad p(20) = 30$

<u>Puntos críticos</u>

$$\frac{dp}{dx} = 1 - \frac{200}{x^2} = \frac{x^2 - 200}{x^2}$$

Anulando: $x^2 = 200 \Longrightarrow x = \sqrt{200} \cong 14{,}15$ m

Para clasificar el punto crítico estudiamos el signo de $\dfrac{dp}{dx}$.

Sg $\dfrac{dp}{dx}$ — 0 +

0 $\quad \sqrt{200} \quad$ 20

El punto crítico corresponde pues al **mínimo** absoluto de la función en el intervalo.

De (2) : $y = \dfrac{100}{x} \cong 7{,}07$ m $\Longrightarrow$ $p \cong 28{,}30$ m

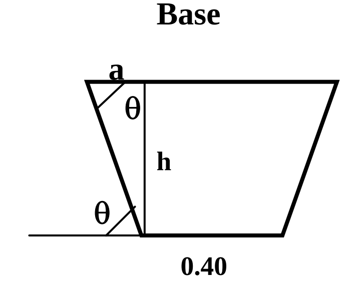
b) Como se utilizan 3 tiros de alambre la longitud total de la misma será : L ≅ 85 m. Como el rollo de alambre de 1000 m cuesta U$S 35 el costo total del alambre del corral ascenderá a aproximadamente 3 U$S.

.

Ejercicio No. 43

a) Tratemos de expresar el volumen **V** del bebedero en función del ángulo θ.

Base



La superficie S del trapecio base es: $S = \dfrac{0.40 + (0.40 + 2a)}{2}.h$ (1)

Refiriéndonos a la figura anterior podemos escribir:

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{h}{0.40}$ ⟹ $h = 0.40\ \text{sen}\,\theta$

$\cos\theta = \dfrac{a}{0.40}$ ⟹ $a = 0.40\cos\theta$

Sustituyendo en (1): $S(\theta) = \dfrac{0.40 + (0.40 + 0.80\cos\theta)}{2}\ 0.40\,\text{sen}\,\theta$

Operando: $S(\theta) = (0.16 + 0.16\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta$

Finalmente y teniendo en cuenta que el largo del bebedero es de 3m tendremos:

$$V(\theta) = 3.\ (0.16 + 0.16\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta \quad (m^3) \quad (2) \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Los valores en los extremos del intervalo son :

$$V(0) = 0 \qquad V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.483$$

<u>Puntos críticos</u>

$$\frac{dV}{d\theta} = 3\left[-0.16\,\text{sen}^2\theta + (0.16 + 0.16\cos\theta)\cos\theta\right]$$

Operando: $\dfrac{dV}{d\theta} = 3.(0.16)\left[-\text{sen}^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta\right] = 0.48\left(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\right)$

Anulando: $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ ⟹ $\cos\theta = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$

Como $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ será $\cos\theta \ge 0$ y por tanto la solución es : $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

⟹ $\theta = \text{Arcos}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

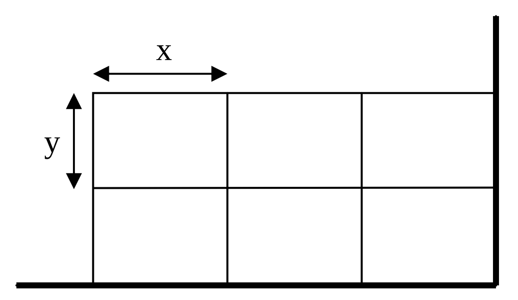
Hemos encontrado un único punto crítico en el intervalo , cuyo valor funcional es según la relación (2) : $V\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\left(0.16 + 0.16\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3} \cong 0.623\ \ m^3$

De acuerdo a los resultados el valor de **θ** hallado corresponde al **máximo** absoluto de la función.

b) El volumen del bebedero será aproximadamente de: **623** lt.

Ejercicio No. 44

a)



Llamemos **x** e **y** a las dimensiones de cada una de las seis subdivisiones iguales.

El área total cercada **A** será : $A = 3x \,.\, 2y = 6xy$ (1)

Maximizaremos el área A sabiendo que la longitud total de cerca **L** es de 100 m.

$L = 6x + 6y \Longrightarrow 6x + 6y = 100$ (2)

Despejando y de (2) y sustituyendo en (1) obtenemos la expresión analítica de la función **A** de variable **x**.

$$A(x) = x\,(100 - 6x) = -6x^2 + 100x \qquad x \geq 0$$

Se trata de una simple función cuadrática de concavidad negativa de la que hallaremos su máximo.

Derivando: $\frac{dA}{dx} = -12x + 100$

Anulando: $x = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$ De (2): $y = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$

El área máxima será: $A_{max} = A(\frac{25}{3}) \cong 417\ m^2$

Observa que se obtiene área máxima cuando las subdivisiones son cuadradas.

b) El área de cada subdivisión será : $A_d = \frac{25}{3} . \frac{25}{3} \cong 69.5\ m^2$

Ejercicio No. 45

a) Tratemos de expresar el costo total de producción en función del número de máquinas que habrá que poner en funcionamiento.

Costo prod. = costo de funcionamiento de máquinas + salario del supervisor

El costo de funcionamiento C_f de las máquinas, llamando **x** al número de ellas será:

$$C_f = 20.x \quad U\$S$$

Como el salario del supervisor es de 4.80 $\frac{U\$S}{h}$ deberemos calcular la cantidad de horas de funcionamiento de las **x** máquinas para producir 8000 juguetes.

Como cada máquina produce 30 juguetes por hora, las **x** máquinas producirán **30x** juguetes por hora.

Para producir los 8000 juguetes necesitaremos $\frac{8000}{30x}$ horas.

En consecuencia el salario del supervisor será: $C_s = \frac{4.80\,.\,8000}{30x} = \frac{1280}{x}$ U\$S.

Finalmente entonces:

$$C_T(x) = 20x + \frac{1280}{x} \quad U\$S$$

Para contestar la pregunta del ejercicio deberemos hallar el valor de **x** que hace mínima la función costo en el intervalo (0,15] .

Efectuemos los cálculos necesarios para bosquejar la función.

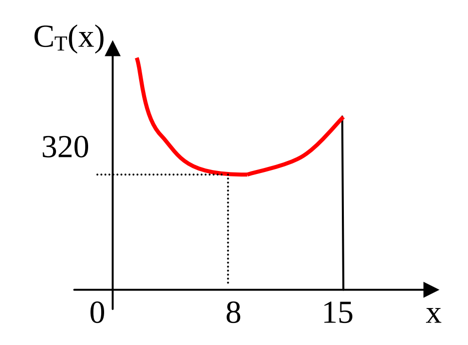
$\lim C_T(x) = +\infty$ $\qquad C_T(15) \cong 385,33$ U\$S $\qquad \frac{dC_T}{dx} = 20 - \frac{1280}{x^2}$

Anulando la derivada obtenemos como punto crítico en el intervalo:

$20\,x^2 - 1280 = 0 \Longrightarrow x = 8 \Longrightarrow C_T(8) = 320$

Los resultados anteriores indican que el punto crítico corresponde al **mínimo** absoluto de la función.

El bosquejo gráfico es el indicado en la figura.



En consecuencia deberán funcionar **8** máquinas y el costo total será de U\$S **320**.

b) El número total de horas de funcionamiento de las máquinas para cumplir con el pedido será de : $n = \dfrac{8000}{30.(8)} \cong 33^h 20^m$

El salario del supervisor será de :

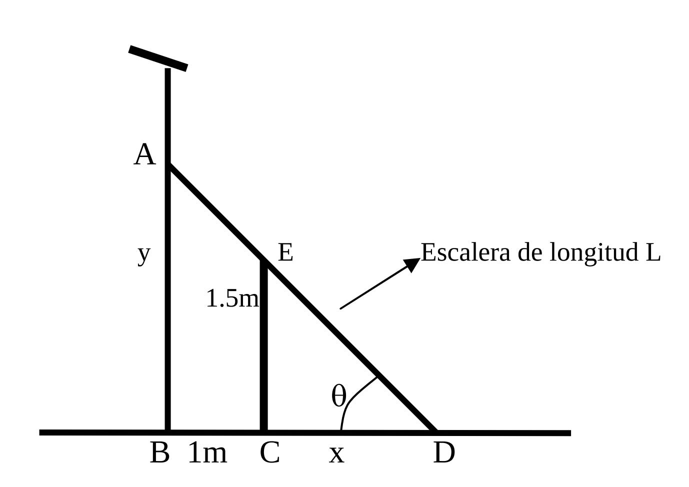
$$C_S = \frac{8000}{30.(8)}.4{,}80 = 160 \text{ U\$S}$$

c) El costo de funcionamiento de las 8 máquinas necesarias será de:

$$C_f\,(8) = 20.(8) = 160 \text{ U\$S}$$

Ejercicio No. 46

a)



Tratemos de expresar la longitud L de la escalera en función del ángulo θ indicado en la figura.

En el triángulo ECD : $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1.5}{x}$ (1)

En el triángulo ABD : $\cos\theta = \dfrac{1+x}{L}$ (2)

De (1) y (2) obtenemos : $L = \dfrac{1 + \dfrac{1.5}{\operatorname{tg}\theta}}{\cos\theta}$

Finalmente : $L(\theta) = \dfrac{1.5 + \text{tg}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}$ $\quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

Estudiemos la función **L** en el intervalo indicado.

$\lim\limits_{\theta \to 0^+} L(\theta) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} L(\theta) = +\infty$

Derivando : $\dfrac{dL}{d\theta} = \dfrac{(1 + \text{tg}^2\theta)\,\text{sen}\,\theta - (1.5 + \text{tg}\,\theta)\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}$

Anulando : $(1 + \text{tg}^2\theta)\,\text{sen}\theta = (1.5 + \text{tg}\,\theta)\cos\theta$

$\Longrightarrow \quad (1 + \text{tg}^2\theta)\,\text{tg}\theta = \text{tg}\,\theta + 1.5 \Longrightarrow \text{tg}^3\theta = 1.5$

$\Longrightarrow \quad \theta = \text{Arctg}\,\sqrt[3]{1.5} \cong 0.85\,\text{rad.} \cong 49^0$

Siendo contínua la función en el intervalo los resultados obtenidos permiten afirmar que el punto crítico hallado corresponde al mínimo absoluto de la misma.

La longitud de la escalera será : $\mathbf{L_{min} \cong 3.51\ m}$

b) La altura " **y** " de apoyo sobre el galpón la calculamos del triángulo ABD.

$y = L\,\text{sen}\,\theta \cong \mathbf{2.65\ m}$

c) El apoyo de la escalera sobre el suelo distará de la cerca una distancia **x** que calculamos considerando el triángulo ECD.

$x = \dfrac{1.5}{\text{tg}\,\theta} \cong \mathbf{1.30\ m}$

Comentario**.**

Podrías haber resuelto el problema considerando una variable diferente del ángulo θ, por ejemplo la distancia **x** . Obtendrías de este modo una expresión L(x) que te conduciría a cálculos más laboriosos al momento del cálculo de la derivada.

Te sugerimos de todos modos que intentes obtener la expresión L(x) y corrobores lo que afirmamos.

La elección de la variable adecuada para dar solución a un problema de optimización suele en muchos casos ser de importancia relevante ya que el estudio de la función puede presentar dificultades de cálculo muy distintas según la variable utilizada.

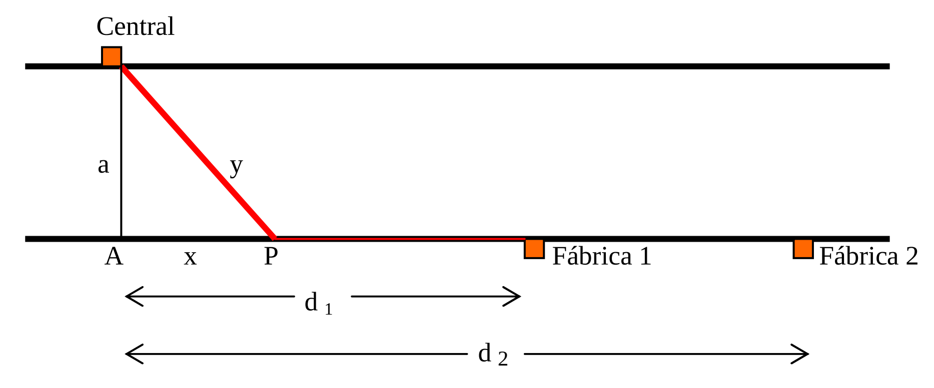
Ejercicio No. 47

a) El costo total **C** de instalación será la suma del costo $\mathbf{C_1}$ del tendido bajo el río más el costo $\mathbf{C_2}$ del tendido en tierra.

Tendremos:

$C_1 = n.y$ $\quad$ $\mathbf{C_1}$ en (U\$S) $\quad$ **n** en $\left(\frac{U\$S}{m}\right)$ $\quad$ **y** en (metros)

$C_2 = p.(d_1 - x)$ $\quad$ $\mathbf{C_2}$ en (U\$S) $\quad$ **p** en $\left(\frac{U\$S}{m}\right)$ $\quad$ $\mathbf{(d_1 - x)}$ en (metros)



El costo total de instalación será:

$$C = n.y + p\,(d_1 - x)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo de la figura tendremos:

$$y = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Finalmente entonces la expresión analítica de la función costo será:

$$C(x) = n\sqrt{a^2 + x^2} + p\,(d_1 - x) \qquad 0 \le x \le d_1$$

Efectuemos los cálculos para bosquejar el gráfico de la función en $[0, +\infty)$

$C(0) = n.a + p.d_1$ $\qquad$ $C(d_1) = n\sqrt{a^2 + d_1^2}$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} C(x) = +\infty$

<u>Puntos críticos</u>.

Derivando: $\quad \dfrac{dC}{dx} = \dfrac{nx}{\sqrt{a^2 + x^2}} - p$

Anulando: $\quad \dfrac{nx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = p \;\Rightarrow\; nx = p.\sqrt{a^2 + x^2}$

Resolvemos la ecuación elevando ambos miembros al cuadrado obteniendo:

$$x = \frac{p.a}{\sqrt{n^2 - p^2}} = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{n}{p}\right)^2 - 1}} = \frac{a}{\sqrt{r^2 - 1}} \qquad (1)$$

siendo $r = \frac{n}{p}$ la relación de precios de tendido bajo el río y en tierra.

Te dejamos como ejercicio verificar que el valor de **x** hallado es efectivamente raíz de la derivada y que no ha sido introducido por la elevación al cuadrado realizada.

Es razonable pensar que en general **n** > **p** , por lo que en el enunciado del ejercicio nos hemos limitado a este caso.

El caso n = p no necesita más que simples consideraciones geométricas. En efecto, en este caso el costo mínimo es equivalente a distancia mínima entre la central y la fábrica , por lo que el tendido debería hacerse totalmente bajo el río uniendo directamente la central y la fábrica con un tendido rectilíneo.

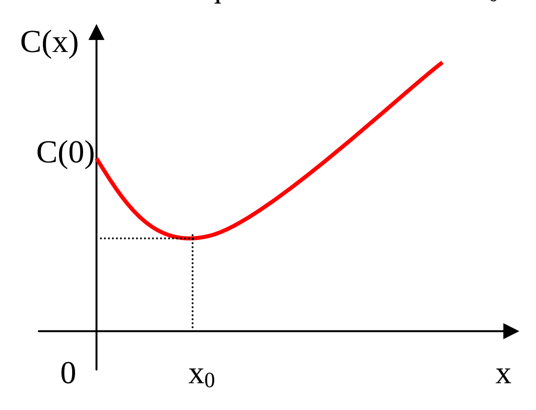
Como puedes deducir de la expresión (1) el valor de **x** correspondiente al punto crítico depende del ancho **a** del río y de la relación de precios **r**.

Nos queda aún por clasificar ese punto crítico. Para ello haremos uso de la derivada segunda de la función.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = n\left(\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x.x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = n\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$$

$\Longrightarrow \quad \frac{d^2C}{dx^2} > 0 \quad \forall\, x$ El punto crítico corresponde entonces al **mínimo** absoluto de la función en el intervalo de estudio.

El bosquejo de la función es el que se indica siendo x_0 la abscisa del punto crítico



Debemos distinguir dos casos según que $\mathbf{d_1}$ sea mayor o, menor o igual que $\mathbf{x_0}$.

1) $\mathbf{d_1 \leq x_0}$

En este caso como puedes concluir de la figura anterior , el mínimo de la función costo se produciría en $x = d_1$ o sea el cable iría directamente de la central a la fábrica bajo el río.

2) $\mathbf{d_1 > x_0}$

En este caso habrá parte bajo el río y parte bajo tierra y la posición del punto P queda determinada por el valor $x = \dfrac{p.a}{\sqrt{n^2 - p^2}}$.

b) Utilizando los valores dados: a = 500 m , d_1=2500 m , n = 50 $\dfrac{U\$S}{m}$, p =30 $\dfrac{U\$S}{m}$

obtenemos: $\mathbf{x_0 = 375\ m}$ y el costo mínimo será: **C(375) = 95.000 U$S**

c) Como $d_2 = 4000\ m > x_0$ seguimos estando en el caso **2)** y la posición del punto P permanece invariable.

El costo mínimo de instalación es este caso será: C(375) siendo la función costo :

$$C(x) = n\ \sqrt{a^2 + x^2}\ + p.(d_2 - x) = 95.000 + p\ (d_2 - d_1)$$

Finalmente: $\mathbf{C_{min} = U\$S\ 140000}$

Ejercicio No. 48

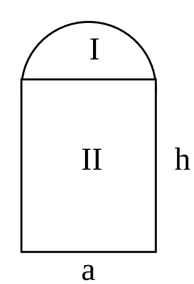
Llamemos (I) a la parte semicircular y (II) a la parte rectangular.

La iluminación E_I que permite pasar la parte (I) será proporcional a la superficie S_I.

Tendremos entonces: $E_I = k\ S_I$ siendo **k** una constante positiva.

La iluminación que por m^2 permite pasar la parte (II) será doble que la de la parte (I).

En consecuencia: $E_{II} = 2\ k\ S_{II}$.



$E_1 = k.\frac{\pi a^2}{8}$ $\qquad$ $E_{II} = 2$ k.a.h

Llamando E a la iluminación total: $\qquad E = k\frac{\pi a^2}{8} + 2.k.a.h \qquad (1)$

El perímetro **p** de la ventana está dado por: $\quad p = a + 2h + \frac{\pi a}{2} \qquad (2)$

Despejando **h** de la expresión (2) y sustituyendo en (1) obtenemos la expresión analítica E(a).

$$E(a) = k\left(\frac{\pi a^2}{8} + pa - a^2 - \frac{\pi a^2}{2}\right)$$

Finalmente: $\qquad E(a) = k\left[-\left(1 + \frac{3\pi}{8}\right)a^2 + p.a\right] \qquad a \geq 0$

Como puedes observar se trata de una función cuadrática con concavidad negativa. Hallaremos el vértice de la parábola representativa para corroborar si se encuentra en el intervalo de estudio.

Derivando: $\qquad \frac{dE}{da} = k\left[-2\left(1+\frac{3\pi}{8}\right)a + p\right]$

Anulando: $k\left[-2\left(1+\frac{3\pi}{8}\right)a + p\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \left(\frac{4}{8+3\pi}\right)p \cong 0.23\,p$

Como el valor de **a** es positivo la ordenada del vértice es el **máximo** absoluto buscado.

Sustituyendo en (2) obtenemos: $h = \left(\frac{4+\pi}{2(8+3\pi)}\right)p \cong 0.20\,p$

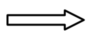
La relación entre el ancho **a** y la altura **h** será de: $\frac{a}{h} = \frac{8}{4+\pi} \cong 1{,}12$

Ejercicio No. 49

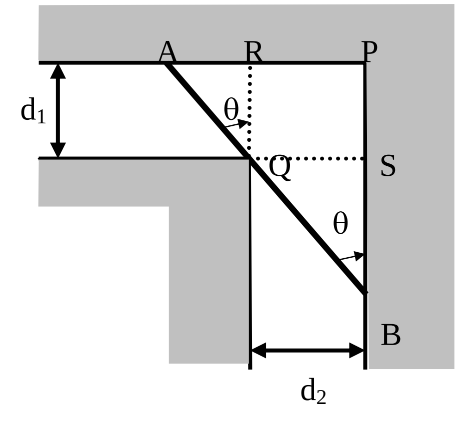
a) Llamemos **L** a la longitud del segmento AB.

De acuerdo a la figura (1): $\quad L = AQ + QB$

Considerando los triángulos ARQ y QSB tenemos: $\qquad AQ = \frac{d_1}{\cos\theta} \qquad QB = \frac{d_2}{\operatorname{sen}\theta}$



$$L(\theta) = \frac{d_1}{\cos\theta} + \frac{d_2}{\operatorname{sen}\theta} \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



Para bosquejar el gráfico de la función **L** en el intervalo de estudio calculamos:

$$\lim_{\theta \to 0^+} L(\theta) = \lim_{\theta \to 0^+} \left(\frac{d_1}{\cos\theta} + \frac{d_2}{\operatorname{sen}\theta} \right) = +\infty \qquad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} L(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{d_1}{\cos\theta} + \frac{d_2}{\operatorname{sen}\theta} \right) = +\infty$$

Puntos críticos

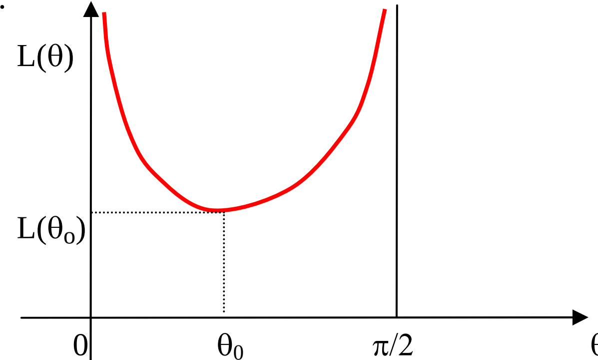
$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{d_1 \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{d_2 \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{d_1 \operatorname{sen}^3\theta - d_2 \cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta}$$

Anulando:

$$d_1 \operatorname{sen}^3\theta = d_2 \cos^3\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^3\theta = \frac{d_2}{d_1} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{Arctg} \sqrt[3]{\frac{d_2}{d_1}}$$

Siendo la derivada contínua en el intervalo de estudio, de acuerdo a los resultados obtenidos podemos afirmar que el único punto crítico hallado corresponde al **mínimo** absoluto de la función.

Llamando θ_o a la abscisa del mínimo, el bosquejo gráfico de la función es como se indica en la figura (2).



b) Aplicando el resultado obtenido en la parte **a)** con los valores dados:

d_1=2.5 m d_2 = 2.0 m   obtenemos $\theta_0 = \text{Arctg}\sqrt[3]{\frac{2}{2.5}} \cong 0.75$ rad.

El correspondiente valor funcional será: L(0.75)≅ 6,36 m

La longitud del caño para que pueda pasar por el corredor deberá ser menor que el mínimo hallado y como su longitud es múltiplo del metro , la mayor longitud de caño que resuelve el problema es de: **L = 6m** .

Ejercicio No.50

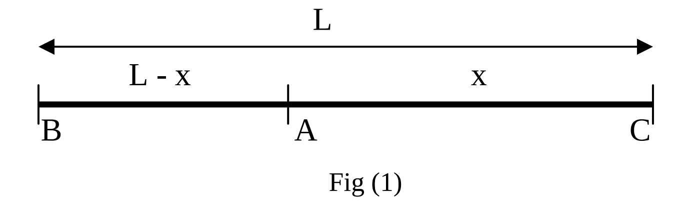


Fig (1)

a) Debemos determinar la posición del punto A para que la suma de las áreas del cuadrado construido con el segmento BA y la circunferencia construida con el segmento AC , sea mínima.

<u>Cuadrado</u>

Lado $\frac{L-x}{4}$ Area $A_1 = \frac{(L-x)^2}{16}$

<u>Circunferencia</u>

Longitud de la cfa. = $2\pi R = x \implies R = \frac{x}{2\pi} \implies$ Area $A_2 = \pi R^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$

El área total a minimizar será entonces:

$$A = \frac{(L-x)^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi}$$

Operando obtenemos finalmente:

$$A(x) = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{L}{8}x + \frac{L^2}{16} \qquad 0 \le x \le L$$

La función área es entonces una simple función cuadrática de concavidad positiva.

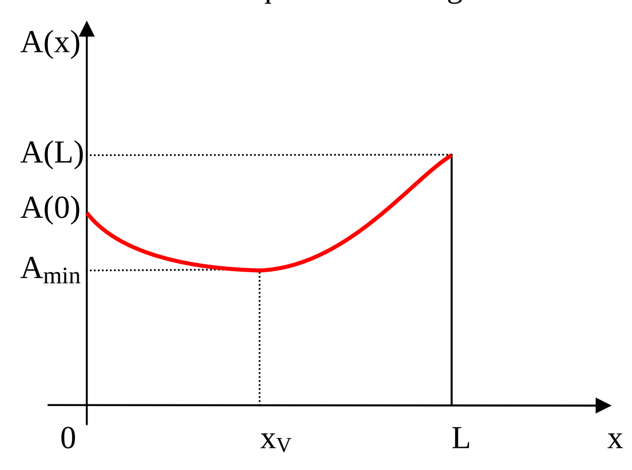
Busquemos el vértice de la parábola representativa de la función.

$$\frac{dA}{dx} = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right)x - \frac{L}{8}$$

Anulando obtenemos: $x_V = \dfrac{\pi}{4+\pi}L$

Siendo $\dfrac{\pi}{4+\pi} < 1$ la abscisa del vértice de la parábola pertenece al intervalo [0, L].

El bosquejo gráfico de la función es el que indica la figura.



De la expresión analítica de la función Area obtenemos:

$A(0) = \dfrac{L^2}{16}$ $\quad A(L) = \dfrac{L^2}{4\pi}$ $\quad A_{min} = \dfrac{L^2}{16+4\pi}$

En definitiva para lograr área **mínima** deberemos efectuar el corte del alambre en el punto A tal que la longitud del segmento AC, fig.(1) , sea $\dfrac{\pi}{4+\pi}L$.

El lado **l** del cuadrado será: $l = \dfrac{L}{4+\pi}$

El radio **R** de la circunferencia será: $R = \dfrac{L}{8+2\pi}$

b) El valor **máximo** de la función área, como puedes deducir de la fig (2), ocurre en el extremo derecho del intervalo, es decir para x = L. Debería entonces construirse solamente la circunferencia de radio $R = \dfrac{L}{2\pi}$.

Si se exigiera necesariamente cortar el alambre, es decir construir algún cuadrado, el problema del máximo carece de solución.

Ejercicio No. 51

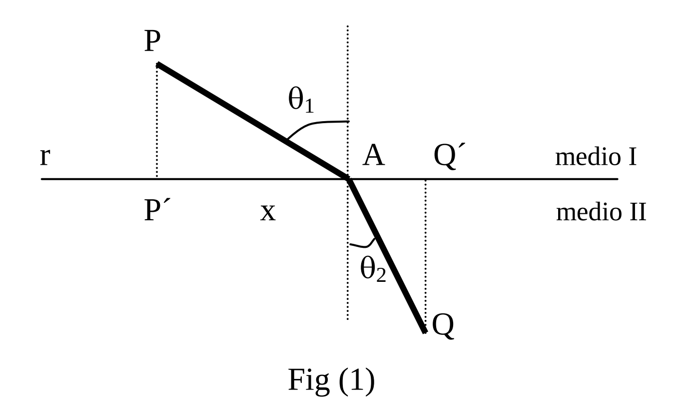


Fig (1)

Trataremos de expresar el tiempo que demora la luz en recorrer la trayectoria PAQ según las distintas posiciones del punto A, para luego determinar la condición de mínimo.

A tales efectos llamaremos: $d_{PP'} = a$ $\quad d_{QQ'} = b$ $\quad d_{P'Q'} = d$ siendo P´ y Q´ las proyecciones ortogonales de P y Q sobre la recta r, respectivamente.

De la figura se concluye que: $\angle\, APP' = \theta_1$ $\quad \angle\, AQQ' = \theta_2$.

Sean además v_1 y v_2 las velocidades de la luz en los medios I y II respectivamente, y $\mathbf{x} = d_{P'A}$ que nos permitirá ubicar la posición de punto A sobre la recta r o sea identificar las distintas posibles trayectorias de la luz para ir de P a Q.

Siendo $\mathbf{t_1}$ el tiempo que demora la luz en recorrer la distancia PA, $\mathbf{t_2}$ el que demora en recorrer la distancia AQ, y recordando que el movimiento es rectilíneo uniforme tendremos:

$$V_1 = \frac{d_{PA}}{t_1} \qquad V_2 = \frac{d_{AQ}}{t_2} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo PP´A : PA = $\sqrt{a^2 + x^2}$

Siendo AQ´ = d – x volviendo a aplicar Pitágoras ahora en el triángulo AQQ´ :

AQ = $\sqrt{b^2 + (d - x)^2}$

De las relaciones (1) , las expresiones anteriores, y llamando **T** al tiempo total de recorrido concluímos:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{d_{PA}}{V_1} + \frac{d_{AQ}}{V_2}$$

Finalmente: $T(x) = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{V_1} + \dfrac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{V_2} \qquad 0 \le x \le d$

Puntos críticos

Derivando: $$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{V_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(d-x)}{V_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \qquad (1)$$

Del triángulo PAP´ obtenemos: $\operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Del triángulo AQQ´ obtenemos: $\operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{d - x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$

Sustituyendo en (1) obtenemos:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{V_1} - \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{V_2}$$

La anulación de la derivada exige entonces: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{V_1} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_2}{V_2}$ o $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \dfrac{V_1}{V_2}$

Tenemos entonces que la derivada de la función se anula para aquellos valores de **x** para los cuales se cumple la relación anterior.

Trataremos de mostrar que ese valor de **x** es único y que es interior al intervalo [0,d] .

Deberemos además justificar que ese punto crítico corresponde al **mínimo** absoluto de la función.

Variemos **x** entre 0 y d. A medida que **x** aumenta , aumenta el ángulo θ_1 en forma monótona y disminuye el ángulo θ_2.

La expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{V_1}$ aumenta monótonamente desde el valor 0 al valor $\dfrac{\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}}{V_1}$

mientras la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_2}{V_2}$ disminuye monótonamente desde el valor $\dfrac{\frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}}}{V_2}$ al valor 0.

Como podemos observar en la figura (2) existe entonces un único punto de corte x_c .

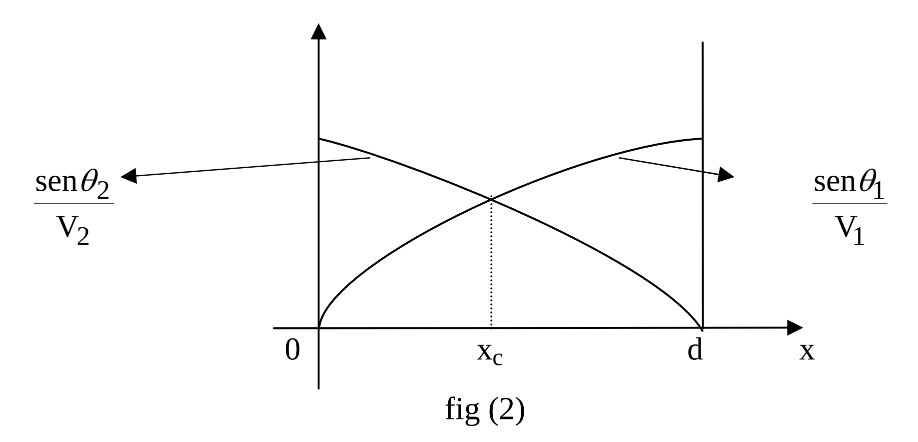


fig (2)

De la figura anterior puedes concluir que:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{V_1} \leq \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{V_2} \qquad \forall x \;/\; 0 \leq x \leq x_c$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{V_1} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{V_2} \qquad \forall x \;/\; x_c \leq x \leq d$$

El signo de la derivada será entonces:

$\operatorname{Sg} \frac{dT}{dx}$ — 0 + (0 ↘ x_c ↗ d)

El punto crítico corresponde entonces al **mínimo** absoluto de la función en el intervalo.

El fenómeno óptico que has estudiado en este ejercicio se conoce como **“Refracción de la luz”** y la relación $\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{V_1}{V_2}$ se conoce como **Ley de Snell** o de la Refracción.

Esta ley suele expresarse también en la forma $\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$ siendo n_1 y n_2 los llamados **índices de refracción** de los medios en que se propaga la luz y definidos como cociente de la velocidad de la luz en el vacío y en el medio considerado.

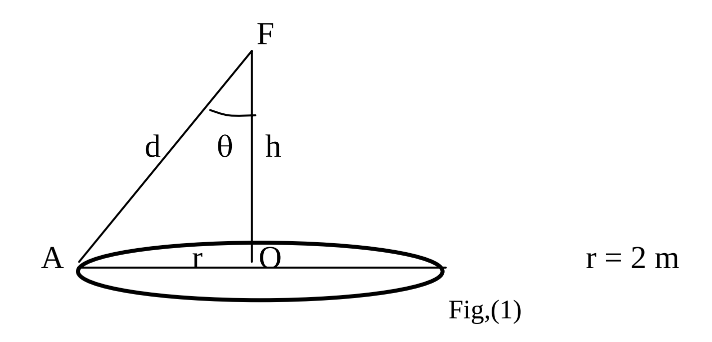
<u>Comentario</u>

Has utilizado en la resolución de este ejercicio , según te indicábamos en el enunciado, el Principio de FERMAT de tiempo mínimo .

Pierre Fermat (1601- 1665) fue un abogado francés que se dedicó a las matemáticas como aficionado realizando aportes verdaderamente notables para el desarrollo de esta ciencia.
Suele considerársele, junto a Descartes, como creador de la Geometría Analítica.
Sus métodos para hallar tangentes a las curvas y para hallar máximos y mínimos de funciones , antes de la invención de los conceptos de límite y derivada , permiten considerarlo como precursor de Newton y Leibnitz en la creación del cálculo diferencial.

Ejercicio No 52

a)



Fig,(1)

La iluminación **E** en el borde del estanque está dada por:

$$E = \frac{I\cos\theta}{d^2} \qquad (1)$$

Del triángulo AOF , fig (1) podemos deducir: $d = \frac{r}{\operatorname{sen}\theta}$.

Sustituyendo en (1) obtenemos la expresión analítica de la función **E** .

$$E(\theta) = \frac{I\cos\theta\,\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Bosquejemos el gráfico de la función en el intervalo.

$E(0) = 0 \qquad E(\frac{\pi}{2}) = 0$

<u>Puntos críticos</u>.

Derivando: $$\frac{dE}{d\theta} = \frac{I}{r^2}(-\operatorname{sen}^3\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta) = \frac{I\operatorname{sen}\theta}{r^2}(-\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta)$$

Finalmente , aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría obtenemos:

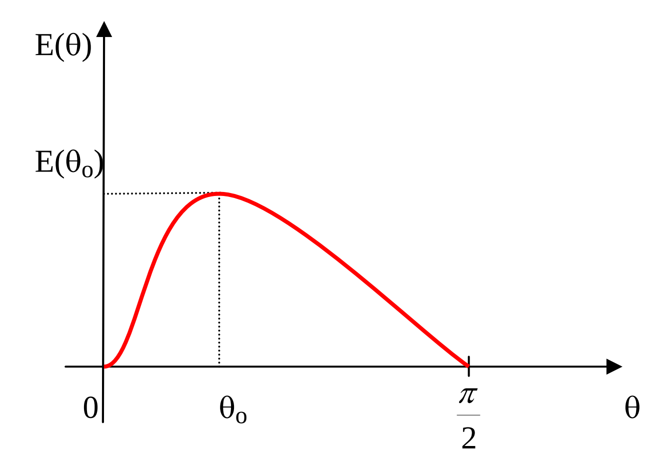
$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{I\,\text{sen}\theta}{r^2}(2 - 3\text{sen}^2\theta)$$

Anulando: $\begin{cases} \text{sen}\,\theta = 0 \\ \text{sen}^2\theta = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \text{Arcsen}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \theta_o \end{cases}$

$\text{Sg}\,\dfrac{dE}{d\theta}$: 0 + 0 — en 0, θ_o, $\dfrac{\pi}{2}$

El punto crítico interior al intervalo correspondiente al valor θ_o es entonces el **máximo** absoluto de la función.

El bosquejo gráfico de la función **E** es el que indica la figura.



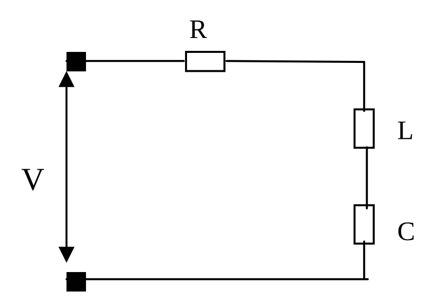
$\theta_o \cong 0.95$ rad $\cong 54{,}5^0$ Del triángulo AOF de la fig.(1) se tiene: $h = \dfrac{r}{\text{tg}\theta}$

Para máxima iluminación la altura **h** de la lámpara deberá ser entonces:

$$h = \frac{r}{\text{tg}\theta_o} \cong \frac{2}{\text{tg}\,0.95} \cong 1{,}41\,\text{m}$$

b) Para I = 500 candelas : $E_{max} = \dfrac{500.(0{,}58).(2/3)}{4} \cong 48$ lux

Ejercicio No. 53



a) El valor máximo I_o de la intensidad de corriente I que circula en el circuito es :

$I_o = \frac{V_o}{Z}$ siendo V_o el valor máximo del voltaje V y Z la impedancia del circuito

dada por la expresión $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

En consecuencia la expresión buscada es:

$$I_o(\omega) = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

b) Dado que el voltaje V_o es constante, para maximizar I_o bastará minimizar el denominador, para lo que basta minimizar la cantidad subradical.

A su vez es fácil ver que para minimizar la suma basta anular el segundo sumando.

En consecuencia la condición de mínimo es: $L\omega = \frac{1}{C\omega}$.

La corriente I se maximiza entonces para $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

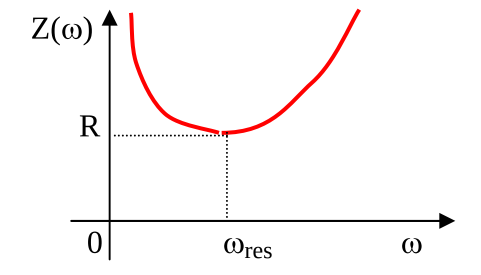
Al valor de ω hallado se le conoce como "**frecuencia de resonancia**".

c) $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ $\omega > 0$

$\lim_{\omega \to 0^+} Z(\omega) = +\infty$ $\lim_{\omega \to +\infty} Z(\omega) = +\infty$

$Z_{min} = \sqrt{R^2} = R$

El bosquejo gráfico es el indicado.



Ejercicio No. 54

La energía gastada por el pez está dada por la expresión:

$$E(v) = \frac{kv^3 d}{v-u} \qquad v > u > 0$$

siendo **k** ,**d** y **u** constantes positivas.

a) Veamos los puntos críticos de la función **E** .

Derivando : $$\frac{dE}{dv} = k.d.\frac{3v^2(v-u)-v^3}{(v-u)^2} = k.d.\frac{v^2(2v-3u)}{(v-u)^2}$$

Anulando: $v = \frac{3}{2}u$

Debemos justificar que este único punto crítico perteneciente el intervalo de estudio corresponde al mínimo absouto de la función.

Para ello estudiemos el signo de la derivada $\frac{dE}{dv}$.

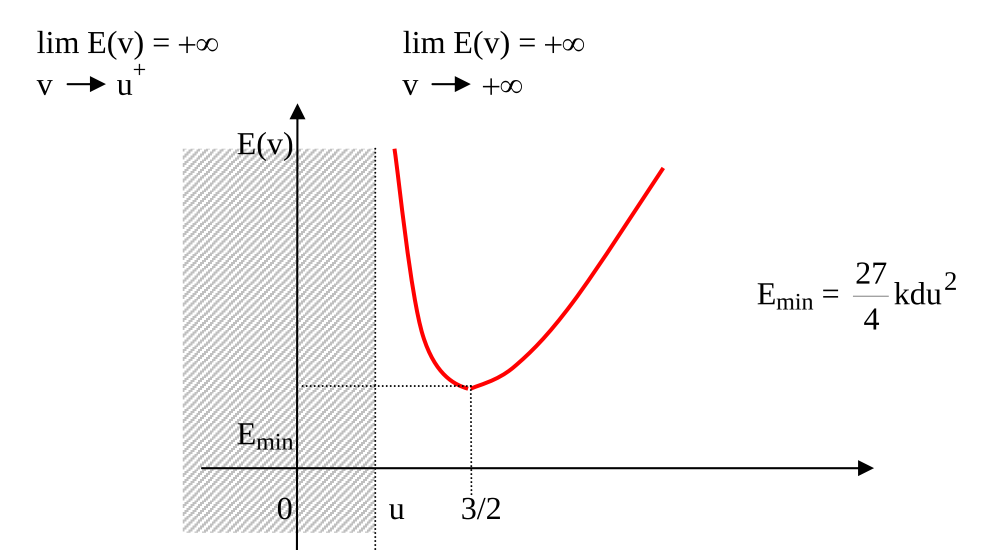
Sg. $\frac{dE}{dv}$ $\nexists$ (u)   —   0 (3/2)   +

Para minimizar su gasto de energía el pez debe nadar a contracorriente a una velocidad **v = 1.5 u** es decir debe superar en un 50% la velocidad de la corriente.

b) Para bosquejar el gráfico de la función E calculamos:

Dominio: $D(E) = \{v, v \in R , v > u\}$

$\lim_{v \to u^+} E(v) = +\infty$ $\lim_{v \to +\infty} E(v) = +\infty$



Ejercicio No.55

Pretendemos en este ejercicio **minimizar** el costo total anual de inventario de la empresa que utiliza 1000 cajas de transistores, los cuales compra a la fábrica a razón de 50 U$S la caja.

A su vez el costo de envío de la fábrica a la empresa es de 40 U$S por envío.

La empresa que ha estimado en 2 U$S el costo anual de almacenamiento por caja se enfrenta con el problema de decidir cuántos pedidos debe realizar al año.

El costo total puede expresarse como:

Costo total = Costo de compra + costo de envío + costo de almacenamiento

Llamemos **x** al número de cajas por envío y estudiemos cada uno de los costos anteriores separadamente.

Costo de compra C_c (anual)

Como se necesitan 1200 cajas al año y cada una cuesta 50 U$S tendremos:

$$C_c = 1000 \,.\, 50 = 50000 \text{ U\$S}$$

Como puedes observar este costo es independiente de la variable del problema por lo que en economía se le denomina **costo fijo**.

Costo de envío C_e (anual)

$$C_e = \frac{\text{Costo envío}}{\text{pedido}} \cdot \frac{\text{N}^{\text{o}}\text{pedidos}}{\text{año}}$$

Como se compran 1000 cajas al año y cada pedido contiene **x** cajas el número de pedidos al año será: $\frac{1000}{x}$.

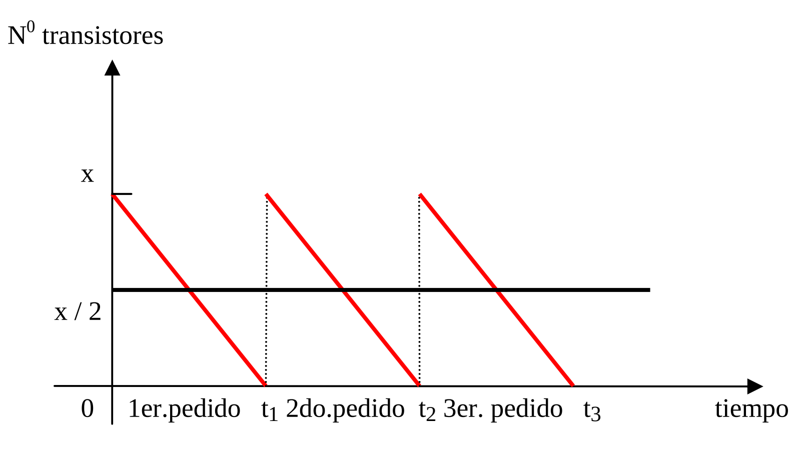
En consecuencia: $C_e = 40 \,.\, \frac{1000}{x} = \frac{40000}{x}$ U$S

Costo de almacenamiento C_a (anual)

Tratemos de ver con algún detalle este costo que no resulta tan sencillo de calcular como los anteriores.

Cuando un pedido llega a la empresa , las cajas se almacenan y los transistores se van retirando a medida que se utilizan hasta agotar el stock, momento exacto en que suponemos llega el segundo pedido y así sucesivamente.

Hemos admitido en el enunciado que los transistores se utilizan a ritmo constante , es decir, que el número de cajas va disminuyendo **linealmente** hasta agotarse.
La figura siguiente ilustra la situación.



Como puedes observar en cada pedido hay cajas que permanecen almacenadas menos tiempo que otras, es decir hay cajas que, por decirlo de alguna manera, pagan menos almacenamiento que otras. Parece razonable pensar que todo ocurre como si tuviéramos $\frac{x}{2}$ cajas almacenadas durante todo el año.

De hecho es admisible que en primera instancia te resistas a admitir como cierta la afirmación anterior . Cuando en el curso sobre Integrales estudies el teorema del valor medio de una función en un intervalo, podrás matemáticamente comprobar la veracidad de la afirmación que hemos hecho .
Con esta salvedad te pedimos que admitas que la afirmación es correcta.

Finalmente entonces: $C_a = 2.\frac{x}{2}$ U$S

Los dos últimos costos calculados, a diferencia del primero, dependen de la variable **x** ; son los que en economía se denominan **costos variables**.
En definitiva, el costo total de inventario será:

$$C_T\,(x) = \frac{2}{2}\,x + \frac{40000}{x} + 50000 \qquad 0 < x \leq 1000$$

Bosquejemos el gráfico de la función costo total.

$\lim_{x \to 0^+} C_T(x) = +\infty$ $\qquad C_T\,(1000) = 51040$

Puntos críticos

Derivando: $\frac{dC_T}{dx} = 1 - \frac{40000}{x^2}$

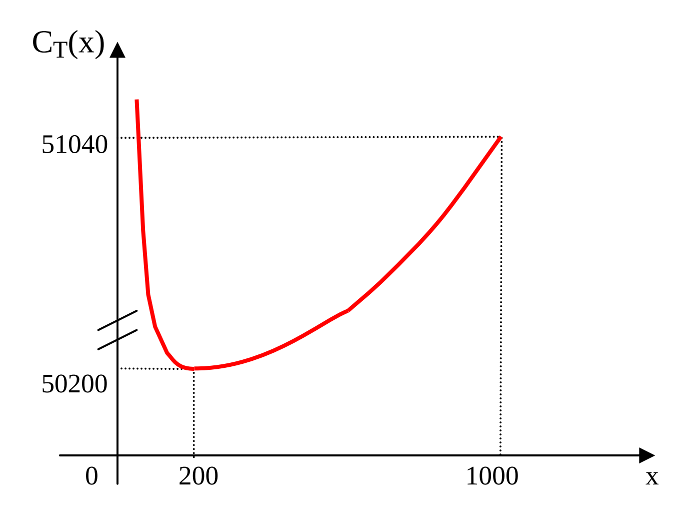
Anulando: $x = \sqrt{40000} = 200$

El valor de la derivada segunda en el punto crítico hallado nos permite clasificarlo rápidamente.

$$\frac{d^2C_T}{dx^2} = \frac{80000}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2C_T}{dx^2}(200) = \frac{80000}{200^3} > 0$$

El punto crítico corresponde entonces al **mínimo** absoluto en el intervalo.

El número de cajas por pedido deberá ser entonces de **200** .



Como has visto en la determinación del punto crítico la componente correspondiente al costo fijo no ha intervenido pues al ser independiente de la variable su derivada es nula. Para optimizar un costo basta entonces optimizar solamente los **costos variables**.

b) Como se necesitan 1000 $\frac{\text{cajas}}{\text{año}}$ deberán realizarse entonces **5** pedidos.

El costo de cada pedido ascenderá a : 200 . 50 + 40 = **10040** U$S

El costo anual total asciende a : 10040 . (5) = **50200** U$S

Ejercicio No. 56

a) Costo de combustible $C_C \, (\frac{U\$S}{km})$

Multiplicando el consumo de combustible en $\frac{lt}{hora}$ por el precio en $\frac{U\$S}{lt}$ tendremos el costo de combustible en $\frac{U\$S}{hora}$.

$$C_C = (\,10 + \frac{v^2}{250}).(0{,}5) \quad \frac{U\$S}{hora}$$

Debemos ahora expresarlo en $\frac{U\$S}{km}$ para lo cual basta dividir la expresión anterior por la velocidad **v** dada en $\frac{km}{hora}$.

Finalmente entonces: $$C_C = (\frac{10}{v} + \frac{v}{250}).(0{,}5) \quad \frac{U\$S}{km}$$

b) Costo de salario $C_s \quad \frac{U\$S}{km}$

Como tenemos dado el salario en $\frac{U\$S}{hora}$ y lo deseamos en $\frac{U\$S}{km}$ debemos dividir el primero por la velocidad **v** .

En consecuencia: $$C_s = \frac{5}{v} \quad \frac{U\$S}{km}$$

Costo total por km

$$C_T = (\frac{10}{v} + \frac{v}{250}).(0{,}5) + \frac{5}{v} \qquad \frac{U\$S}{km} \qquad (1)$$

c) La velocidad más económica es la que **minimiza** la expresión (1) en el intervalo [45,90] .

Valores en los extremos: $C_T\,(45) \cong 0.31 \ \frac{U\$S}{km}$ $\qquad C_T\,(90) \cong 0.29 \ \frac{U\$S}{km}$

Puntos críticos

Derivando: $$\frac{dC_T}{dv} = \left(\frac{-10}{v^2} + \frac{1}{250}\right)0{,}5 - \frac{5}{v^2} = \frac{0.5v^2 - 2500}{250v^2}$$

Anulando: $v = \sqrt{5000}$

$Sg \dfrac{dC_T}{dv}$

$$\underset{45}{\blacksquare}\quad - \quad \underset{\sqrt{5000}}{0} \quad + \quad \underset{90}{\blacksquare}$$

El punto crítico corresponde pues al **mínimo** absoluto de la función en el intervalo.

La velocidad más económica es entonces: **v** $= \sqrt{5000} \cong 70{,}711 \ \dfrac{km}{h}$

El **costo mínimo** por km. es: $C_T(\sqrt{5000}) \cong 0.28 \ \dfrac{U\$S}{km}$

El costo total del viaje de 400 km será: **C = 0,28 (400) ≅ 112 U$S**

d) Costo salario**.**

$$C_S = \frac{5}{v}.400 = \frac{5}{\sqrt{5000}}.400 \cong 29 \quad U\$S$$

Costo de combustible.

$$C_c = \left(\frac{10}{v} + \frac{v}{250}\right).0{,}5.(400) = \left(\frac{10}{\sqrt{5000}} + \frac{\sqrt{5000}}{250}\right).0{,}5.(400) \cong 83 \ \ U\$S$$

e) La función costo total cambia en este item pues el costo de salario aumenta debido a la presencia de la segunda persona.

Tendremos ahora: $C_T = \left(\dfrac{10}{v} + \dfrac{v}{250}\right).0{,}5 + \dfrac{7}{v}$

Derivando: $\dfrac{dC_T}{dv} = \left(\dfrac{-10}{v^2} + \dfrac{1}{250}\right)0.5 - \dfrac{7}{v^2} = \dfrac{0.5v^2 - 3000}{250v^2}$

Anulando: $v = \sqrt{6000}$

El punto crítico sigue correspondiendo al mínimo absoluto de la función.

La velocidad más económica es entonces : $v = \sqrt{6000} \cong 77{,}5 \ \dfrac{km}{h}$.

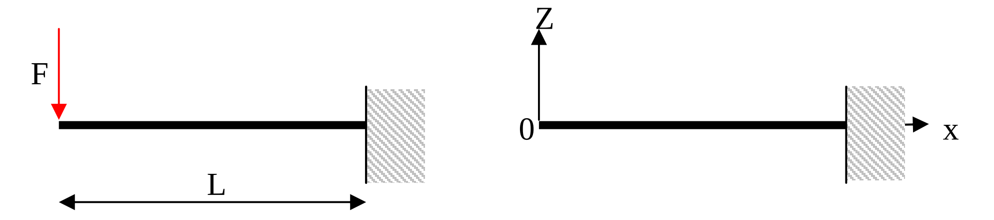
El costo mínimo por km es ahora: $C_T(\sqrt{6000}) \cong 0{,}31 \ \dfrac{U\$S}{km}$

El costo total del viaje será entonces: **C = 0,31.(400) ≅ 124 U$S**

Costo salario: $C_s = \frac{7}{v}.400 = \frac{7}{\sqrt{6000}}.400 \cong 36.15$ U$S

Costo de combustible: $C_c \cong 87{,}85$ U$S

Ejercicio No. 57



a) La elástica de la viga en el sistema XOZ indicado es:

$$Z(x) = -\frac{FL^3}{6EI}\left[2 - 3\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \qquad 0 \le x \le L$$

Estudiemos la función Z en el intervalo [0,L].

$$Z(0) = -\frac{FL^3}{3EI} \qquad Z(L) = 0$$

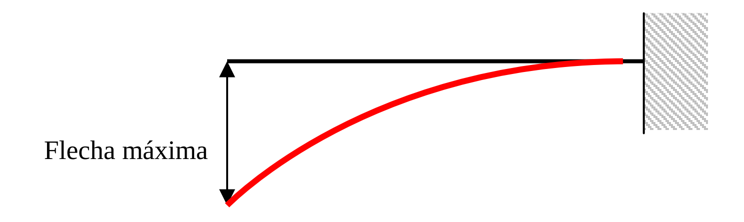
Puntos críticos

Derivando: $$\frac{dZ}{dx} = -\frac{FL^3}{6EI}\left[-3\frac{1}{L} + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\frac{1}{L}\right]$$

Anulando: $$\frac{-3}{L} + \frac{3x^2}{L^3} = 0 \quad \Rightarrow \; -L^2 + x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm L$$

En consecuencia no existen puntos críticos interiores al intervalo por lo que el **mínimo** absoluto de la función (flecha máxima) se produce en el extremo izquierdo del intervalo , es decir en x = 0 , y su valor es $-\frac{FL^3}{3EI}$.

La viga adquirirá la forma que se indica en la figura.



$f_{max} = -\dfrac{FL^3}{3EI}$ (El signo negativo indica que el extremo izquierdo de la viga ha descendido).

b) Angulo de giro θ

$$\theta = \frac{dZ}{dx} = -\frac{F}{2EI}\left(-L^2 + x^2\right) \qquad 0 \le x \le L$$

Estudiaremos la función θ en el intervalo indicado.

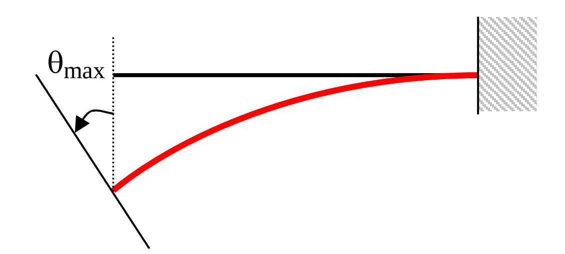
Valores en los extremos.

$$\theta(0) = \frac{FL^2}{2EI} \qquad\qquad \theta(L) = 0$$

Derivando: $$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2Z}{dx^2} = -\frac{F}{EI}x$$

Como fácilmente puedes observar la derivada es negativa en todo el intervalo de estudio , por lo que la función **θ** será monótona decreciente y su máximo absoluto se encontrará en el extremo izquierdo del intervalo.

$\theta_{max} = \dfrac{FL^2}{2EI}$



Ejercicio No 58

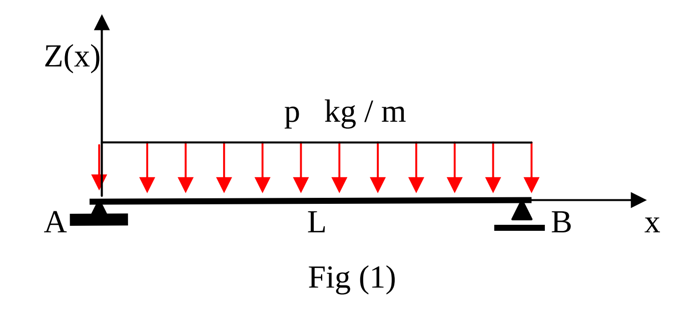


Fig (1)

El problema presenta simetría respecto de la mediatriz del segmento AB, por lo que es presumible esperar que la flecha máxima se produzca en el punto medio de la viga y que el máximo ángulo de giro (en valor absoluto) se produzca en los extremos.

Veamos si el cálculo reafirma lo anterior.

a) Ecuación de la elástica.

$$Z(x) = -\frac{pL^4}{24EI}\left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right] \qquad 0 \le x \le L$$

Valores en los extremos del intervalo.

$Z(0) = 0 \qquad Z(L) = 0$

Derivando: $$\frac{dZ}{dx} = -\frac{pL^4}{24EI}\left[\frac{1}{L} - \frac{6}{L}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{4}{L}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] = -\frac{pL^3}{24EI}\left(1 - 6\frac{x^2}{L^2} + 4\frac{x^3}{L^3}\right)$$

Anulando: $$1 - 6\frac{x^2}{L^2} + 4\frac{x^3}{L^3} = 0 \qquad \Rightarrow \quad 4x^3 - 6Lx^2 + L^3 = 0$$

Debemos resolver el polinomio de tercer grado anterior. Habíamos presumido al principio que el extremo de la función Z debía encontrarse en el punto medio de la viga. De ser así $x = \frac{L}{2}$ debería ser raíz del polinomio. Verifiquémoslo utilizando el esquema de Ruffini.

	4	-6L	0	L^3
$\frac{L}{2}$		2L	$-2L^2$	$-L^3$
	4	- 4L	$-2L^2$	0

Las restantes dos raíces del polinomio son las raíces de la ecuación:

$$2x^2 - 2Lx - L^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2L \pm \sqrt{4L^2 + 8L^2}}{4} = \frac{2L \pm 2L\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2L + 2L\sqrt{3}}{4} = L\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) > L \\[2ex] x_1 = \dfrac{2L - 2L\sqrt{3}}{4} = L\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Lo anterior nos permite afirmar que el único punto crítico en el intervalo de estudio corresponde a la raíz $x = \frac{L}{2}$.

Nos falta clasificar el punto crítico hallado. Para ello basta que estudiemos el signo de la derivada que está dado por el opuesto del signo del polinomio de tercer grado.

Sg. $\frac{dZ}{dx}$

x_3		0		$L/2$		L		x_2
0			−	0	+			0
			↘		↗			

Finalmente la función presenta **mínimo** absoluto (flecha máxima) en $x = \frac{L}{2}$.

El valor de la flecha máxima será: $f_{max} = \frac{5}{384}\frac{pL^4}{EI}$.

La viga se deforma según indica la figura (2).

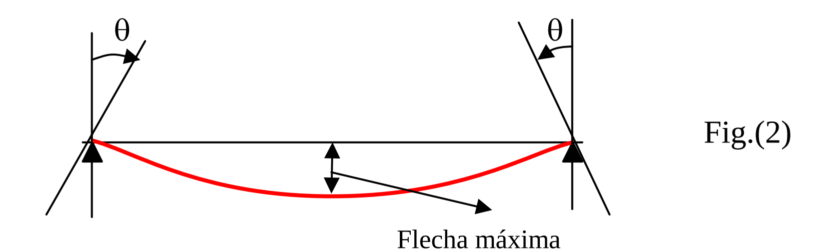


Fig.(2)

b) Angulo de giro

$$\theta(x) = \frac{dZ}{dx} = -\frac{pL^3}{24EI}\left(1 - \frac{6}{L^2}x^2 + 4\frac{x^3}{L^3}\right) \qquad 0 \le x \le L$$

Valores en los extremos.

$$\theta(0) = -\frac{pL^3}{24EI} \qquad \theta(L) = \frac{pL^3}{24EI}$$

Derivando: $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2Z}{dx^2} = -\frac{pL^3}{24EI}\left(-12\frac{x}{L^2} + 12\frac{x^2}{L^3}\right) = -\frac{p}{24EI}\left(-12Lx + 12x^2\right)$

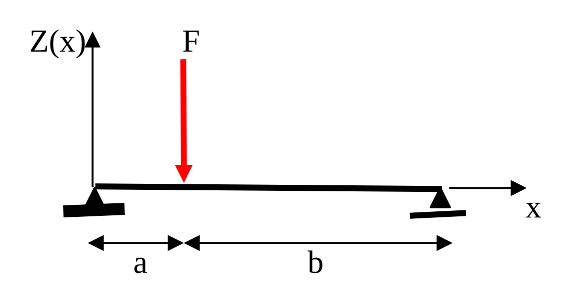
Anulando: $-Lx + x^2 = 0 \Longrightarrow$ $\underline{x = 0}$ $\underline{x = L}$

No existen entonces puntos críticos en el interior del intervalo de estudio. El máximo y el mínimo absolutos se encuentran en los extremos del intervalo.

$$\theta_{max} = \frac{pL^3}{24EI} \qquad \theta_{min} = -\frac{pL^3}{24EI}$$

Ambos extremos de la viga giran el mismo ángulo, uno en sentido horario y el otro antihorario , como se indica en la figura (2).

Ejercicio No.59



ELASTICA

$$Z(X)\begin{cases}\dfrac{-Fa^2b^2}{6EIL}\left(2\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}-\dfrac{x^3}{a^2b}\right) & 0 \le x \le a \\[2ex] \dfrac{-Fa^2b^2}{6EIL}\left(2\dfrac{L-x}{b}+\dfrac{L-x}{a}-\dfrac{(L-x)^3}{ab^2}\right) & a < x \le L\end{cases}$$

Para demostrar que la función Z es contínua en x=a recuerda la definición de función contínua en un punto.

Debemos verificar que: $\lim\limits_{x \to a^-} Z(x) = \lim\limits_{x \to a^+} Z(x) = Z(a)$

Llamemos $K = \dfrac{-Fa^2b^2}{6EIL}$

Tendremos entonces:

$$\lim_{x \to a^-} K\left(2\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x^3}{a^2b}\right) = 2K \qquad \lim_{x \to a+} K\left(2\frac{L-x}{b}+\frac{L-x}{a}-\frac{(L-x)^3}{ab^2}\right) = 2K \qquad Z(a)=2K$$

En consecuencia la función es contínua en x = a.

b) Para hallar la flecha máxima deberemos primero hallar la expresión analítica de la derivada $\dfrac{dZ}{dx}$, luego demostraremos que es contínua en el intervalo [0,L] , en particular en el punto x = a.

Como en la parte **a)** hemos mostrado que la función es contínua en x =a , para probar su derivabilidad alcanzará con verificar la igualdad de los límites laterales de la función derivada en x = a. Para $a = L / 3$ $b = 2a$ tendremos:

$$\frac{dZ}{dx} \begin{cases} \dfrac{-F}{9EI}\left(5a^2 - 3x^2\right) & 0 \le x < a \\ \dfrac{-F}{18EI}\left[-8a^2 + 3(L-x)^2\right] & a < x \le L \\ \dfrac{-2}{9}\dfrac{F}{EI}a^2 & x = a \end{cases}$$

<u>Derivabilidad en x = a</u>

$$\lim_{x \to a^-} \frac{-F}{9EI}\left(5a^2 - 3x^2\right) = -\frac{2}{9}\frac{Fa^2}{EI}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{-F}{18EI}\left[-8a^2 + 3(L-x)^2\right] = \frac{-F}{18EI}\left(-8a^2 + 12a^2\right) = -\frac{2}{9}\frac{Fa^2}{EI}$$

En consecuencia la función Z es derivable en x = a . En el resto del intervalo también lo es ya que las expresiones analíticas de la derivada son de tipo polinómico.

Estudiaremos ahora el signo de $\frac{dZ}{dx}$.

1ro.) $0 \le x \le a$

Anulando la derivada: $5a^2 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm a\sqrt{\frac{5}{3}} \cong \pm 1.29a$

No existen entonces puntos críticos en $0 \le x \le a$.

Sg $\frac{dZ}{dx}$

$$\underset{0}{\blacksquare}\overset{\text{———}}{\text{————}}\underset{a}{\blacksquare} \quad \searrow$$

2do) $a < x \le L$

Anulando la derivada: $-8a^2 + 3(L-x)^2 = 0 \Longrightarrow L - x = \pm a\sqrt{\frac{8}{3}}$

Finalmente: $x = L \mp a\sqrt{\frac{8}{3}} = L\left(1 \mp \sqrt{\frac{8}{27}}\right)$ El valor de **x** correspondiente al signo de más no pertenece al intervalo mientras que el correspondiente al signo de menos sí pertenece.

El signo de $\frac{dZ}{dx}$ será , teniendo en cuenta que $L\left(1-\sqrt{\frac{8}{27}}\right) \cong 0.45L$

Sg $\frac{dZ}{dx}$

— 0 +

a 0.45L L

El valor $x = L\left(1-\sqrt{\frac{8}{27}}\right)$ corresponde al **mínimo** absoluto de la función Z en el intervalo [0,L] (flecha máxima).

El valor de la flecha máxima será:

$$f_{max} = \left| Z(0.45L) \right|$$

Recordando que: L = 3a b = 2a obtenemos:

$$f_{max} \cong \left| Z(0.45L) \right| = \left| Z(1.35\ a) \right| \cong \left| \frac{-Fa^2(2a)^2}{6EI(3a)} \left[2\frac{0.55.(3a)}{2a} + \frac{0.55.(3a)}{a} - \frac{0.55^3(3a)^3}{a.(2a)^2} \right] \right|$$

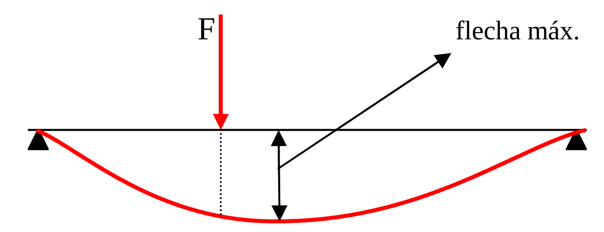
Operando obtenemos finalmente:

$$f_{max} \cong 0.48\frac{Fa^3}{EI}$$

La elástica de la viga es la indicada en la figura.

Observa que la flecha máxima no se produce en el punto de aplicación de la carga.

Ello sólo ocurriría , por razones de simetría , si la carga F se aplicara en el punto medio de la viga .



c) <u>Desplazamiento angular en los extremos</u>

$$\theta\ (0) = \frac{dZ}{dx}(0) = -\frac{5}{81}\frac{FL^2}{EI} \qquad \theta(L) = \frac{dZ}{dx}(L) = \frac{4}{81}\frac{FL^2}{EI}$$

Como puedes deducir de los resultados el extremo más cercano al punto de aplicación de la fuerza es aquel en el que se produce el mayor ángulo de giro de la sección de la viga.

Ejercicio No. 60

a) La ganancia es la diferencia entre el ingreso y el costo totales .

$$G(q) = I_T - C_T$$

Derivando: $\dfrac{dG}{dq} = \dfrac{dI_T}{dq} - \dfrac{dC_T}{dq}$ (1)

La función **G** presentará un máximo en un nivel de producción $\mathbf{q_o}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1ro) $\dfrac{dG}{dq}(q_{o)} = 0$

2do) $\dfrac{d^2G}{dq^2}(q_{o)} < 0$

Anulando la expresión (1) deberá cumplirse: $\dfrac{dI_T}{dq}(q_o) - \dfrac{dC_T}{dq}(q_o) = 0 \implies$

$\dfrac{dI_T}{dq}(q_o) = \dfrac{dC_T}{dq}(q_o)$ lo que implica que $I_{mg}(q_o) = C_{mg}(q_o)$.

Volviendo a derivar (1) y aplicando la condición 2da. tendremos:

$$\frac{d^2G}{dq^2}(q_o) = \frac{d^2I_T}{dq^2}(q_o) - \frac{d^2C_T}{dq^2}(q_o) < 0 \implies \frac{d^2I_T}{dq^2}(q_o) < \frac{d^2C_T}{dq^2}(q_o)$$

b) <u>Costo total</u>

$$C_T = 0{,}10\ q^2 - 0{,}2\ q + 100 \qquad U\$S$$

<u>Función demanda :</u>

$$p(q) = -\ 0{,}11\ q + 41{,}8 \qquad \frac{U\$S}{unidad}$$

Si se venden **q** $\dfrac{unidades}{mes}$ el ingreso total mensual será : $I_T = p.q = 0{,}11q^2 + 41{,}8q$

Para la utilidad tendremos: $G(q) = I_T - C_T = -\ 0{,}21\ q^2 + 42\ q - 100 \qquad q \geq 0$

Se trata , como puedes observar , de una función cuadrática con concavidad negativa. Si la abscisa del vértice de la parábola representativa pertenece al intervalo de estudio, corresponderá al **máximo** absoluto de la función **G**.

Derivando: $\frac{dG}{dq} = -0{,}42\,q + 42$

Anulando: **q = 100** $\frac{\text{unidades}}{\text{mes}}$

La ganancia máxima será: **G(100) = 2000** $\frac{\text{U\$S}}{\text{mes}}$

El precio de venta por unidad será: **p (100) = 30,80** U$S

Verificaremos que se cumplen las condiciones de la parte **a)** del ejercicio.

El costo marginal será la derivada del costo total.

$$C_{mg} = 0{,}20q - 0{,}2$$

El ingreso marginal será la derivada del ingreso total.

$$I_{mg} = -\,0{,}22q + 41{,}2$$

Igualando: $0{,}20q - 0{,}2 = -\,0{,}22q + 41{,}2 \implies q = 100$

Además: $\frac{d^2C}{dq^2}(100) = 0{,}20 \qquad \frac{d^2I}{dq^2}(100) = -0{,}22 \implies \frac{d^2I}{dq^2} < \frac{d^2C}{dq^2}$

Observa que la igualación del costo marginal y el ingreso marginal resulta ser una manera mucho más cómoda de lograr el valor de **q** sin necesidad de hallar la función **G**, como lo hicimos líneas arriba.

COMENTARIO

El costo marginal es (aproximadamente) el costo que para el fabricante representa fabricar una unidad más de producto.

El ingreso marginal es (aproximadamente) el ingreso que obtendrá por la venta de la nueva unidad producida.

Mientras el costo marginal sea inferior al ingreso marginal le convendrá al fabricante producir una nueva unidad , en cambio si el costo marginal es superior al ingreso marginal deberá reducir su producción.

La igualdad de ambos, según vimos , da el punto óptimo de trabajo.

APENDICE

UNIDADES Y EQUIVALENCIAS

Te indicamos a continuación magnitudes que han sido utilizadas en los ejercicios con sus correspondientes unidades en el sistema Internacional (S.I) así como otras unidades de uso corriente.

Te mostramos además algunas equivalencias entre ellas.

Magnitud	S . I .	Otras
Longitud **L**	m	cm- dm - Km - pulg – pié-.milla- milla naútica
Superficie **S**	m^2	cm^2- héctarea (Hc.) - pié ^{2}
Volumen **V**	m^3	cm^3 - litro (lt)
Tiempo **t**	seg	minuto - hora
Masa **m**	kg	gr - libra (lb) - Tonelada (Tn)
Velocidad **v**	$\frac{m}{sg}$	$\frac{cm}{sg}$ - $\frac{km}{h}$ - nudo = $\frac{\text{milla nautica}}{h}$
Velocidad angular **ω**	$\frac{rad}{sg}$	$\frac{rad}{minuto}$
Aceleración **a**	$\frac{m}{sg^2}$	$\frac{cm}{sg^2}$
Aceler. Angular **γ**	$\frac{rad}{sg^2}$	
Fuerza **F**	Nw (Newton)	kg_f (kilog. Fuerza) - lb_f - Ton_f
Presión **p**	$\frac{Nw}{m^2}$	at. (atmósfera) - cm Hg. - $\frac{kg_f}{cm^2}$ - $\frac{lb_f}{pulg^2}$
Densidad lineal de carga **q**	$\frac{kg_f}{m}$	$\frac{Tn_f}{m}$
Densidad volumétrica de masa **ρ**	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{gr}{cm^3}$ - $\frac{gr}{lt}$
Trabajo **W**	Joule	kg_f .m
Temperatura **T**	^{0}C	^{0}F - ^{0}K

Magnitud	S.I.	Otras
Intensidad de corriente **I**	Amp.	mA - μ A
Diferencia de potencial **V**	Voltios	mV - KV
Carga eléctrica **Q**	Coulomb	m C - μ C
Resistencia **R**	Ohm.	KΩ - M Ω
Energía **E**	Joule	vatio.seg - Kvh - Caloría - BTU
Potencia **P**	vatio	Kv - Mv
Frecuencia **f**	Hz	RPM
Gasto volumétrico $\mathbf{Q_v}$	$\frac{m^3}{sg}$	$\frac{lt}{sg}$
Intensidad luminosa **I**	Cd (Candela)	
Iluminación **E**	lx (lux)	ph (fotio)

EQUIVALENCIAS

Longitud

1 km = 10^3 m = 10^4 dm = 10^6 cm   1 pié = 12 pulgadas (1´= 12´´)

1´= 30.48 cm   1´´ = 2.54 cm   1milla = 1609 m   1 milla náutica = 1852 m

Superficie

1 pulg^2 = 6.452 cm^2 1 pié^2 = 929 cm^2 1 Hc. = 10^4 m^2 1 m^2 = 10^4 cm^2

Volumen

1 m^3 = 10^6 cm^3 1 dm^3 = 1 lt   1 Galón (EUA) =3.785 lt

Tiempo

1 hora = 60 minutos = 3600 seg.

Masa

1 lb = 453.6 gr = 0.4536 Kg   1 Ton = 10^3 Kg

Velocidad

$1\ \frac{m}{s} = 3.6\ \frac{Km}{h}$ $1\frac{milla}{h} = 1609\frac{Km}{h}$ 1 nudo = $1.852\frac{Km}{h}$

Aceleración

$1\ \frac{m}{s^2} = 10^2 \frac{cm}{s^2}$

Fuerza

$1\ Kg_f = 9.8\ Nw$ $1\ lb_f = 0.4536\ Kg_f = 4.445\ Nw$

Presión

1 at = 76 cm Hg. $1\ \frac{lb_f}{pulg^2}$ (p.s.i.) = $0.073 \frac{Kg_f}{cm^2}$

Densidad lineal

$1\ \frac{Tn_f}{m} = 10^3 \frac{Kg_f}{m}$

Densidad volumétrica de masa

$1 \frac{Kg}{m^3} = 10^{-3} \frac{gr}{cm^3}$

Trabajo

$1\ Kg_f\ .\ m$ (Kilográmetro) = 9.8 Joule

Temperatura

$1\ ^0C = 1.8\ ^0F$ $1\ ^0C = 1\ ^0K$

Fórmulas de transformación: $^0F = {}^0C\ .\ 1.8 + 32$ $^0K = {}^0C + 273$

Intensidad de corriente

1 Amp. = 10^3 mA = 10^6 μ A

Diferencia de Potencial

1 Voltio = 10^3 mV 1 Kv = 10^3 volt.

Resistencia

1 KΩ =10^3 Ω 1MΩ = 10^6 Ω

Potencia

1 Kv = 10^3 vatios 1 hp = 0.746 KV

Energía calorífica

1 BTU = 0.252 Kcal = 1055 Joule

Iluminación

1 lux = 10^{-4} ph

EJERCICIOS SUGERIDOS

Te indicamos a continuación aquellos ejercicios que a nuestro entender son de interés especial para la orientación que has elegido , lo que no implica que los demás carezcan de él.

En especial creemos que los problemas que hemos denominado de "Cálculo" y de "Geometría" son de interés común a todos los Bachilleratos , aunque no los incluiremos en la lista.

Bachillerato de Administración .

Capítulo 1 - Ejercicios Nos. : 2 –7 – 9 – 11 – 13 – 19 – 21

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 7 – 9 - 10 – 19 – 23 – 28 – 29 –34 – 35 - 54 – 55 - 60

Bachillerato Agrario .

Capítulo 1 – Ejercicios Nos. : 2 – 5 – 7 – 11 – 12 – 18 – 20 – 22

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 9 – 14 – 15 – 16 – 23 – 28 –29 –34 – 41 – 42 – 43 – 44 - 49 – 54 - 60

Bachillerato de Diseño de la Construcción .

Capítulo 1 - Ejercicios Nos. : 2 – 5 – 8- 9 – 10 – 11 – 14 – 19- -22

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 7 – 11 – 12 – 28 – 29 – 34 - 41 – 45 – 47 – 49 – 54 – 57 – 58 – 59 – 60

Bachillerato de Electroelectrónica .

Capítulo 1 – Ejercicios Nos. : 2 – 4 – 5 – 8 – 9 – 10 – 11 – 14 – 17 – 21 – 22 – 23 - 24

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 9 – 17 – 18 – 19 – 21 – 22 – 23 – 24 – 28 – 29 – 32 – 34 – 45 – 47– 48
49 – 51 – 52 – 53 – 54 – 55 – 60

Bachillerato de Informática .

Capítulo 1 – Ejercicios Nos. : 2 – 4 – 9 – 11 – 13 – 17 – 19 – 21 – 23

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 9 – 17 – 23 – 27 – 28 – 29 – 34 – 45 – 54 – 56 – 60

Bachillerato de Mecánica .

Capítulo 1 – Ejercicios Nos. : 1 – 2 – 4 – 5 – 8 – 9 – 10 – 11 – 14 – 15 – 21 – 22 – 23

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 8 – 9 – 12 – 19 – 21 – 22 – 23 – 24 – 28 – 29 – 32 – 34 - 41 – 45 – 47
49 – 54 – 56 – 57 – 60

Bachillerato de Química

Capítulo 1 – Ejercicios Nos.: 1 – 2 – 5 – 6 – 9 – 10 – 11 – 13 – 16 – 1720 – 21

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 8 – 9 – 21 – 23 – 28 – 29 – 34 – 41 – 45 –49 – 51 – 53 – 54 – 57 - 60

Bachillerato de Termodinámica

Capítulo 1 – Ejercicios Nos. : 1 – 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 11 – 13 – 16 – 17 – 19 – 21 – 23

Capítulo 2 – Ejercicios Nos. : 8 – 21 – 23 – 28 – 29 – 34 – 41 – 45 – 51 – 53 – 54 – 57 - 60

BIBLIOGRAFIA

Ecuaciones Diferenciales .... C.H. Edwards – David Penney

Ecuaciones Diferenciales............................ Takeuchi – Ramirez - Ruiz

Matemática General .... César Trejo

Cálculo infinitesimal .... M. Spivak

Cálculo Infinitesimal y
Geometría Analítica .... G. Thomas

Cálculo Superior .... Murray – Spiegel

Cálculo – Conceptos y contextos .... James Stewart

Cálculo para Administración , Economía
y Ciencias Sociales .... Laurence Hoffmann–Gerald Bradley

Cours D´Electrotechnique .... A. Kassaatkine – M. Pérékaline

Alternating Current Circuit Theory .... Myril Reed

Física General .... S. Frish – A. Timoreva

Química La Ciencia Central .... Brown – Lemay - Bursten

Hidráulica .... B. Nekrasov

Problems in fluid Mechanics .... J.F. Douglas

Resistance des Matériaux .... V. Feodosiev

Manual de resistencia de materiales.......... Pisarenko – Yákovlev - Matvéev

Fundamentals of Heat Transfer .... M. Mikheyev

Dirección y Administración de
Campos y granjas....................................... P. Cherot